

Mémoire de Master 2 Mathématiques
Abélianisation de groupes-pleins-topologiques

Lacourte Octave

Encadré par Yves de Cornulier

3 avril 2018 - 15 juillet 2018

Préface

J'ai effectué un stage du 3 avril 2018 au 15 juillet 2018 sur l'abélianisation de groupes plein topologiques sous la tutelle de Yves de Cornulier à l'Institut Camille Jordan et l'Université Lyon 1.

L'objectif du stage est de comprendre l'abélianisé du groupe des transformations d'échange d'intervalles ainsi que l'abélianisé de groupe plein topologique dans le cadre de système de Cantor minimaux. La suite de ce travail serait d'étudier l'abélianisé d'un sous-groupe des échanges d'intervalles et les résultats de la deuxième partie nous laisse à penser que le noyau du morphisme entre cet abélianisé et celui des échanges d'intervalles en général est un 2-groupe.

Je remercie l'Université Lyon 1 et l'Institut Camille Jordan de m'avoir accueilli pour ce stage et plus particulièrement M. Yves de Cornulier d'avoir accepté de me superviser pour ce stage. Il m'a proposé un sujet passionnant et a su répondre à toutes mes interrogations en prenant tous le temps nécessaire pour y répondre. Je remercie aussi Julien Melleray qui a accepté de faire partie de mon jury lors de ma soutenance de stage.

Table des matières

1	Groupes pleins topologiques de transformations d'échange d'intervalles	4
1.1	Transformations d'échange d'intervalles (IET)	4
1.1.1	Définition sur $[0, 1[$	4
1.1.2	Minimalité et décomposition des transformations d'échange d'intervalles	5
1.1.3	Deux exemples	9
1.1.4	Construction du Cantor	11
1.2	Un isomorphisme pour identifier l'abélianisé du groupe des IET	12
1.2.1	Intermède sur le produit tensoriel	12
1.2.2	L'isomorphisme	13
2	Le cas des systèmes de Cantor minimaux	19
2.1	Autour des systèmes de Cantor	19
2.1.1	Définitions	19
2.1.2	Le groupe $[[\phi]]_0$	19
2.2	Relation d'équivalence étale, Diagramme de Bratteli et groupes pleins AF	21
2.2.1	Différentes relations d'équivalence	21
2.2.2	Diagramme de Bratteli et groupes pleins AF	21
2.2.3	Le cas des systèmes de Cantor minimaux	22
2.3	La signature	24
2.3.1	La signature pour le cas AF	24
2.3.2	La signature pour $[[\phi]]_0$	26
2.4	L'abélianisé de $[[\phi]]_0$	29
2.4.1	Lien avec l'abélianisé de $[[\phi]]$	29
2.4.2	Identification en tant que 2-groupe abélien élémentaire	29
3	Conclusion	31
4	Groupes de transformations d'échanges d'intervalle cadre plus général	32
4.1	Le cas 2-divisible	32
4.1.1	Définitions	32
4.1.2	Un cas injectif	33
4.2	A la recherche d'un exemple tel que le noyau n'est pas trivial	36
4.2.1	Des cas où l'image du morphisme d'abélianisation est nulle	36
5	Annexes	39
5.1	Implémentation des IET	39

1 Groupes pleins topologiques de transformations d'échange d'intervalles

Toute cette grande partie repose sur le travail de M. Keane [3] et surtout celui de P. Arnoux [5].

1.1 Transformations d'échange d'intervalles (IET)

1.1.1 Définition sur $[0, 1[$.

Soit $X = [0, 1[$ et $n \leq 2$ un entier. Pour tout n -uplet $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\alpha_i > 0$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, on pose $\beta_0 = 0$, $\beta_i = \sum_{j=1}^i \alpha_j$ et $X_i = [\beta_{i-1}, \beta_i[$. Pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on pose $\alpha^\tau = (\alpha_{\tau^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\tau^{-1}(n)})$ ainsi que les β_i^τ et les X_i^τ correspondants pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Définition 1. L'application $T := \sum_{i=1}^n T_i$ où $T_i : \begin{cases} X_i & \longrightarrow & X_{\tau(i)}^\tau \\ x & \longmapsto & x - \beta_{i-1} + \beta_{\tau(i)-1}^\tau \end{cases}$ est appelée la transformation d'échange du (α, τ) -intervalle.

Proposition 2. L'application T envoie de manière isométrique l'intervalle X_i sur l'intervalle $X_{\tau(i)}^\tau$. De plus elle vérifie :

1. T est inversible et son inverse est la transformation d'échange du (α^τ, τ^{-1}) -intervalle.
2. T est continue sauf peut-être en les points de l'ensemble $D = \beta_1, \dots, \beta_n$ et T est continue à droite partout.
3. $\lim_{\substack{x \rightarrow \beta_i \\ x < \beta_i}} Tx = \beta_{\tau(i)}^\tau$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
4. $T\beta_i = \beta_{\tau(i+1)-1}^\tau$ pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

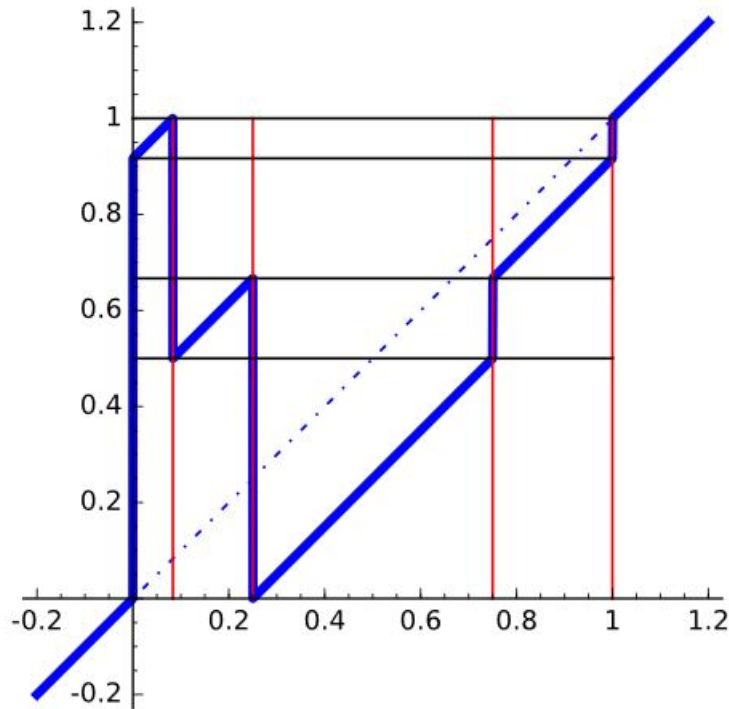
Démonstration. On commence par vérifier que X_i est bien envoyé sur $X_{\tau(i)}^\tau$ de manière isométrique. On a directement par définition de T que $|Tx - Ty| = |x - y|$ pour tout $x, y \in X_i$ et aussi que pour tout $x \in X$, $Tx > \beta_{\tau(i)-1}^\tau$. Il reste à voir que $Tx < \beta_{\tau(i)}^\tau$. Or $x < \beta_{i-1} + \alpha_i$ donc $Tx < \alpha_i + \beta_{\tau(i)-1}^\tau = \beta_{\tau(i)}^\tau$ car $\alpha_i = \alpha_{\tau^{-1}(\tau(i))}$.

1. On note G la transformation d'échange du (α^τ, τ^{-1}) -intervalle. Soit $x \in X_i$ donc $Tx \in X_{\tau(i)}^\tau$, $G \circ T(x) = G(x - \beta_{i-1} + \beta_{\tau(i)-1}^\tau) = x - \beta_{i-1} + \beta_{\tau(i)-1}^\tau - \beta_{\tau(i)-1}^\tau + \beta_{\tau^{-1}(\tau(i))-1}^{\tau^{-1}}$. Or pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\alpha_j^{\tau^{-1}} = \alpha_{\tau^{-1}(j)}^\tau = \alpha_{\tau(\tau^{-1}(j))} = \alpha_j$. D'où $\beta_{\tau^{-1}(\tau(i))-1}^{\tau^{-1}} = \beta_{i-1}$ et ainsi $G \circ T(x) = x$. De manière similaire $T \circ G(x) = x$. D'où T est inversible d'inverse G .
2. Comme T est isométrique sur les X_i alors T est bien continue partout sauf peut être en les β_i où elle est continue à droite.
3. $T(\beta_i - \epsilon) - \beta_{\tau(i)}^\tau = \beta_i - \beta_{i-1} - \beta_{\tau(i)}^\tau + \beta_{\tau(i)-1}^\tau - \epsilon = \alpha_i - \alpha_i - \epsilon = -\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$
4. On rappelle que $\beta_i \in X_{i+1}$ d'où : $T\beta_i = \beta_i - \beta_i + \beta_{\tau(i+1)-1}^\tau = \beta_{\tau(i+1)-1}^\tau$ \square

Dans la suite on s'intéressera beaucoup à une famille des ces transformations. Ce sont celles qui seront dites minimales où nous pourrions construire un espace compact totalement séparé sur lequel la transformation est un homéomorphisme. Cela permettra entre autre de faire le lien avec la deuxième grande partie.

Graphe d'une IET

On donne ici un exemple concret d'une IET afin de comprendre ce que l'on peut lire sur le graphe. L'IET considéré ici est $((1/12, 1/6, 1/2, 3/12), (4 \ 2 \ 1 \ 3))$. On note alors que $\beta_1 = 1/12$, $\beta_2 = 3/12$, $\beta_3 = 3/4$, $\beta_4 = 1$ ainsi que $\beta_1^\tau = 1/2$, $\beta_2^\tau = 2/3$, $\beta_3^\tau = 11/12$, $\beta_4^\tau = 1$. On sait que les β_i sont placés sur l'axe des abscisses aux points de discontinuités de l'IET (droites verticales). Il se trouve que l'on peut lire les β_i^τ sur l'axe des ordonnées (droites horizontales). Le rajout de la droite associée à l'identité (diagonale en pointillés) permet de comprendre par combien on ajoute sur chaque intervalle. En effet on trouve que sur X_i on ajoute $\beta_i^\tau - \beta_i$ ([1]).



1.1.2 Minimalité et décomposition des transformations d'échange d'intervalles

Dans cette partie on considère T une transformation d'échange du (α, τ) intervalle où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$. On va chercher à trouver une décomposition de T en transformations d'échanges d'intervalles minimales ou périodiques.

Remarque. Pour $x \in X$ on notera l'orbite positive de x par $O^+(x) = \{T^n x \mid n \geq 1\}$, son orbite négative par $O^-(x) = \{T^n x \mid n \leq 0\}$ et l'orbite de x par $O(x) = O^+(x) \cup O^-(x)$. L'ensemble D est toujours l'ensemble des β_i et on notera $D^\infty = \bigcup_{i=0}^{n-1} O(\beta_i) \cup \{1\}$ l'ensemble des orbites des points de discontinuité de T .

La minimalité

Définition 3. T est minimale si pour tout $x \in X$ l'orbite de x est dense dans X .

Le théorème suivant a été prouvé par M.Keane dans [3], il est très important car il est à l'origine de la décomposition des échange d'intervalles que nous aborderons plus loin.

Théorème 4. T est minimale si et seulement si :

1. T est apériodique (c'est-à-dire sans points périodiques)
2. Si F est une union finie d'intervalles semi-ouverts dont les points finaux appartiennent à l'ensemble dénombrable D^∞ alors

$$T(F) = F \iff F = \emptyset \text{ ou } F = [0, 1[$$

Un ensemble qui est union finie d'intervalles semi-ouverts dont les extrémités appartiennent à D^∞ sera désormais dit " de type M ".

Démonstration.

Montrons le premier sens par contraposée, supposons que T ne satisfait pas les deux conditions. Ainsi soit il y a des points périodiques et donc $O(x)$ n'est pas dense pour ces points ce qui implique que T n'est pas minimale. Soit il existe F de type M avec $TF = F$ et $\emptyset \neq F \neq X$. Dans ce cas il existe $y \in X \setminus \overline{F}$ et comme pour tout $x \in F$ on a $\overline{O(x)} \subset \overline{F}$ alors l'orbite de x n'approche pas y donc n'est pas dense dans X . Ainsi T n'est pas minimale.

Réciproquement par l'absurde supposons que les deux conditions sont vérifiées et soit $x \in X$ tel que l'orbite de x ne soit pas dense dans X . Soit $U = X \setminus \overline{O(x)}$ l'ouvert non vide associé. Il existe un intervalle semi-ouvert I de longueur positive contenu dans U tel que $I \cap O(x) = \emptyset$ c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{Z}, x \notin T^n I$. Il suffit de démontrer que pour tout intervalle semi-ouvert de longueur positive il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\bigcup_{i=0}^k T^i I = X$ ce qui sera absurde car cela impliquerai que l'orbite de x est dense dans X .

On note $I = [a, b[$, comme D^∞ est dénombrable on peut supposer que $a, b \notin D^\infty$ quitte à réduire I . Pour tout $y \in D \cup \{a, b\}$ on pose :

$$k(y) = \inf\{n \geq 0 \mid T^{-n}y \in]a, b[\}$$

Cet infimum est en fait un minimum par le théorème de récurrence de Poincaré car T est une IET ce qui implique que T est une fonction mesurable qui préserve la mesure de Lebesgue. Les points $\{T^{-k(y)}y \mid y \in D \cup \{a, b\}, k(y) < \infty\}$ forment une partition de I en intervalle semi-ouvert I_1, \dots, I_e . Comme $|D \cup \{a, b\}| = n + 1$ cela donne au plus $n + 1$ points à l'intérieur de $[a, b[$ donc en comptant les extrémités de cet intervalle on obtient au plus $n + 3$ points ce qui forme au plus $n + 2$ intervalles. D'où $e \leq n + 2$.

On fixe $j \in \llbracket 1, e \rrbracket$, et soit $t_j \geq 1$ minimal tel que $T^{t_j} I_j \cap I \neq \emptyset$. Alors par construction de la partition de I , tous les ensembles $I_j, T I_j, \dots, T^{t_j} I_j$ sont des intervalles semi-ouverts. En effet par récurrence on a bien I_j qui est un intervalle semi-ouvert. Si cela est vrai jusqu'au rang $s \leq t_j - 1$, par définition de I_j on a $T^s I_j$ qui ne contient pas de points de D (ailleurs que potentiellement en son extrémité) sinon on obtiendrait que $k(y) < s$ et que $T^{-k(y)}(y) \in \overset{\circ}{I_j}$ ce qui contredit la construction de I_j . D'où $T^s I_j \subset X_{i_0}$ pour un certain i_0 . Or T est continue et à une action isométrique sur X_{i_0} d'où $T^{s+1} I_j$ est un intervalle semi-ouvert. On montre de même que ni a ni b ne sont dans l'intérieur de $T^s I_j$ pour $0 \leq s \leq t_j$. De plus on sait que $T^{t_j} I_j$ intersecte I on en déduit que $T^{t_j} I_j \subset I$.

Ainsi tous les intervalles $I_j, \dots, T^{t_j-1} I_j$ pour $j \in \llbracket 1, e \rrbracket$ sont disjoints deux à deux

et on pose $F = \bigcup_{j=1}^e \bigcup_{i=0}^{t_j-1} T^i I_j$. F est une union finie d'intervalles semi-ouverts, il reste encore à montrer que $TF = F$. Comme T préserve la mesure on a en fait que la mesure de $T^{t_j} I_j$ est la même que celle de I_j de plus comme $\bigcup_{j=1}^e T^{t_j} I_j \subset I$ et que la mesure

totale des I_j est celle de I et que les $T^{t_j} I_j$ sont tous disjoints on a $\bigcup_{j=1}^e T^{t_j} I_j = I$. D'où

$$TF = T\left(\bigcup_{j=1}^e \bigcup_{i=0}^{t_j-1} T^i I_j\right) = \left(\bigcup_{j=1}^e \bigcup_{i=1}^{t_j-1} T^i I_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^e T^{t_j} I_j\right) = \left(\bigcup_{j=1}^e \bigcup_{i=1}^{t_j-1} T^i I_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^e I_j\right) = F.$$

Ainsi par la propriété 2 on en déduit comme $F \neq \emptyset$ que $F = X$ ce qui conclut. \square

La décomposition

Dans cette partie on montre que l'on va pouvoir décomposer toute IET en composition d'IET qui sont soit minimales soit périodiques. Ce qui justifie l'intérêt porté à celles qui sont minimales en particulier on les étudiera dans un cadre plus général dans la deuxième grande partie. On prend toujours T une transformation d'échange du (α, τ) -intervalle.

Lemme 5. *Soient a et b deux points de discontinuité de T^p tels que $]a, b[$ ne contienne aucun point de discontinuité de T^p . Alors si $]a, b[$ contient un point de période p , $]a, b[$ est entièrement formé de tels points.*

Démonstration. On a que T^p est aussi une transformation d'échange d'intervalle et on note σ la permutation associée et Y_i les intervalles associés à T^p . L'intervalle $]a, b[$ est un de ces intervalles disons Y_i . Il est envoyé par T^p sur $Y_{\sigma(i)}$ de manière isométrique. De plus on sait aussi comme T^p est une transformation d'échange d'intervalle que T^p préserve l'ordre sur les Y_j c'est-à-dire que si $a, b \in Y_j$ tels que $a \leq b$ alors $T^p a \leq T^p b$. Ainsi soit $x \in Y_i$ tel que $T^p x = x$ et soit $y \in Y_i$. On peut supposer sans perdre de généralité que $x \leq y$. On a alors $|T^p x - T^p y| = |x - y| = |x - T^p y|$ donc il y a deux possibilités pour $T^p y$, une qui est plus petite que x et une qui est plus grande (c'est y), comme T^p préserve l'ordre sur Y_i alors $T^p y = y$. Donc T^p est l'identité sur $Y_i =]a, b[$. \square

Lemme 6. *L'ensemble des points d'ordre $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ est un ensemble de type M , et il n'existe qu'un nombre fini d'entiers pour lesquels ces ensembles sont non vides.*

Démonstration. On déduit du lemme 5 que si on a un point d'ordre p dans l'intervalle Y_i associé à T^p alors tout Y_i est formé de points d'ordre p . Or il y a un nombre fini de ces intervalles (qui sont semi-ouverts) et ces intervalles ont bien leurs extrémités dans $D^{+\infty}$. Donc l'ensemble des points d'ordre p est bien un ensemble de type M . De plus cet ensemble est stable par T donc s'il est non vide comme il contient un élément ω de $D^{+\infty}$ alors il contient l'orbite de ω donc il contient un élément de D . Il est clair que l'ensemble des points d'ordre p et celui d'ordre $q \neq p$ sont disjoints, ainsi comme le cardinal de D est fini on en déduit qu'il y a un nombre fini de $p \geq 1$ tel que l'ensemble des points d'ordre p soit non vide. \square

On a réussi à isoler les points périodiques de T et le complémentaire de ces points est aussi un ensemble de type M . On peut alors se restreindre à cet ensemble et on montre le lemme suivant.

Lemme 7. *Soit T une IET sans points périodiques alors si T est définie sur n intervalles alors il existe $k \leq n$ et M_1, \dots, M_k une partition de $[0, 1[$ en ensemble de type M sur lesquels T est minimale.*

Démonstration. C'est la même chose que précédemment, on construit une partition maximale M_1, \dots, M_k de la manière suivante. On considère $X = [0, 1[$, c'est un intervalle semi ouvert dont ses extrémités sont dans $D^{+\infty}$ donc de type M qui de plus est invariant par T . S'il est maximal on a fini. Sinon on prend M_1 un sous-ensemble invariant de type M maximal invariant par T . On a M_1 qui contient un point de $D^{+\infty}$ et donc un point de D car il est stable par T . De plus $X \setminus M_1$ est toujours un ensemble de type M seulement il contient un point de D en moins! Par une récurrence immédiate on récupère alors au maximum n ensemble M_1, \dots, M_n de type M maximale invariant par T qui forment une partition de $[0, 1[$. De plus par le théorème 4 on obtient que T est minimale sur chaque M_i . \square

Ainsi ces trois lemmes nous permettent de décomposer une IET en produit de deux catégories d'IET : les périodiques et les minimales.

Théorème 8. *Soit T une transformation d'échange d'intervalle. Il existe une partition finie en ensembles de type M noté $M_1, \dots, M_k, P_1, \dots, P_e$ et des entiers n_1, \dots, n_e tels que T soit minimale sur tous les M_i et périodique de période n_i sur P_i pour tout i .*

Un critère de minimalité

Soit T une transformation d'échange du (α, τ) intervalle avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$.

Définition 9. Une permutation τ est dite irréductible si pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, τ vérifie : $\tau(\{1, \dots, j\}) \neq \{1, \dots, j\}$.

On remarque immédiatement que si τ n'est pas irréductible alors T peut se décomposer en deux sous transformation. En notant j le premier indice tel que l'on ait égalité on voit que T est la composition de deux IET, une sur $[0, \beta_j[$ et une sur $[\beta_j, 1[$. On supposera alors dans la suite de cette partie que τ est irréductible.

Lemme 10. *Si les orbites des points de $D = \{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ sont infinies et distinctes alors T est minimale.*

Démonstration.

On vérifie les deux propriétés du 4 pour que T soit minimale.

1. Soit $x \in X$ et supposons que x est un point périodique de T . Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ tel que $T^n x = x$. On pose

$$\beta = \max\{T^{-i}\beta_j, 0 \leq i, j \leq n-1, T^{-i}\beta_j \leq x\}$$

. Si $\beta = x$ alors soit un des points de D est périodique, ce qui contredit les hypothèses, soit $\beta = x = T^{-i}(0)$, pour un certain i . Or 0 est dans $T(D)$ car sinon cela signifie que $\tau(1) = 1$ et donc que $\beta_1^1 = \beta_1$ c'est-à-dire que $\beta_1 \in T(D)$ ce qui contredit les hypothèses. Mais alors comme $0 \in T(D)$ on en déduit que $x = T^{-i+1}\beta_j$ pour un certain j , et comme x est périodique alors β_j aussi ce qui contredit les hypothèses. Donc T est apériodique.

2. Soit F un ensemble de type M et $x \in X$. On suppose $F \neq \emptyset$ et $x \neq 1$. Si x est un point du bord de F , alors soit Tx est un point du bord de F soit $x \in D \cup \{0\}$. En effet supposons que Tx n'est pas un point du bord et par l'absurde supposons que $x \notin D \cup \{0\}$ et montrons que x n'est pas un point du bord de F . De ces suppositions on en déduit que T est un homéomorphisme d'un intervalle fermé I autour de x sur son image TI . Ainsi TI est un intervalle fermé autour de Tx . Comme Tx n'est pas un point du bord de F il existe un intervalle fermé J , avec $J \subset TI \cap F$, autour de Tx . Par continuité de T^{-1} sur J on obtient un intervalle K qui est dans F et qui soit autour de x . Donc x n'est pas un point du bord de F , ce qui est absurde. Donc x est dans $D \cup \{0\}$ ou alors Tx est un point du bord de F .

Comme F possède un nombre fini de points au bord alors il existe $t \geq 0$ tel que $T^t x \in D \cup \{0\}$. De même il existe $s < 0$ tel que $T^s x \in D \cup \{0\}$. Or si $t \neq 0$, $s \neq 1$ ou $x \neq 0$ alors soit on a un β_i qui est périodique soit deux orbites de β_i distincts se rencontrent, ce qui est absurde. Donc $x = 0$. Ainsi le seul autre point du bord de F autre que 1 est 0 . Donc $F = X$.

Ainsi par le lemme 4 on en déduit que T est minimale. \square

Définition 11. On dit que T est complètement irrationnelle si τ est irréductible et si les seules relations rationnelles entre les nombre α_i sont les multiples de $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.

Théorème 12. Si T est complètement irrationnelle alors T est minimale.

Démonstration. Si les conditions du lemme précédent ne sont pas satisfaites alors il existe r, s et t tels que $1 \leq r, s \leq n-1$ et $t \geq 0$ tel que $T^{t+1}\beta_r = \beta_s$.

Pour tout $1 \leq u \leq t$ le point $T^u\beta_r$ vit dans un intervalle X_{j_u+1} avec $0 \leq j_u \leq n-1$. On pose alors $\tau(j_u+1) - 1 = k_u$ pour $1 \leq u \leq t$. On pose aussi $k_0 = \tau(r+1) - 1$. On définit à part $j_0 = s$ car il est plus convenable dans la suite des calculs de prendre $j_0 = s$ que de le définir comme les autres.

Ainsi comme $T\beta_i = \beta_{\tau(i+1)-1}^\tau$ alors $T\beta_r = \beta_{\tau(r+1)-1}^\tau = \beta_{k_0}^\tau$.

On a aussi $T^{u+1}\beta_r = T^u\beta_r + (\beta_{k_u}^\tau - \beta_{j_u})$ pour $1 \leq u \leq t$.

Et ainsi $T^{t+1}\beta_r = \sum_{u=0}^t \beta_{k_u}^\tau - \sum_{u=1}^t \beta_{j_u}$.

D'où avec la condition $T^{t+1}\beta_r = \beta_s = \beta_{j_0}$ on en déduit $\sum_{u=0}^t (\beta_{k_u}^\tau - \beta_{j_u}) = 0$. Et donc une relation sur les α :

$$\sum_{u=0}^t \left(\sum_{i=1}^{k_u} \alpha_{\tau^{-1}(i)} - \sum_{i=1}^{j_u} \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \alpha_{\tau^{-1}(i)} - d_i \alpha_i$$

On a rajouté des 0 si besoin et on a $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_{n-1} \geq 0$ et $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_{n-1} \geq 0$, $c_j = \text{card}\{u | 0 \leq u \leq t, k_u \geq j\}$ et $d_j = \text{card}\{u | 0 \leq u \leq t, j_u \geq j\}$.

En rajoutant $c_n = d_n = 0$ on obtient $\sum_{i=1}^n (c_{\tau(i)} - d_i) \alpha_i = 0$. Comme T est complètement irrationnelle on obtient $c_{\tau(i)} = d_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

On montre maintenant que $c_1 = \dots = c_n = d_1 = \dots = d_n = 0$. Si ce n'est pas le cas on choisit j maximal tel que $c_{j+1} = \dots = c_n = d_{j+1} = \dots = d_n$ et soit c_j ou d_j qui n'est pas nulle. Comme τ et τ^{-1} sont irréductibles alors il existe i et i' avec $j+1 \leq i, i' \leq n$ et $\tau(i), \tau^{-1}(i') \leq j$. Ainsi $c_{\tau(i)} = d_i = 0$ car $i \geq j+1$ or $c_{\tau(i)} \geq c_j$ et par décroissance on en déduit que $c_j = 0$. De même $d_{\tau^{-1}(i')} = c_{i'} = 0$ donc $d_j = 0$, ce qui est absurde.

On en déduit alors que $k_u = j_u = 0$ pour tout $u \in \llbracket 0, t \rrbracket$ or $j_0 = s \geq 1$ ce qui est absurde.

Ainsi les conditions du lemme précédent sont vérifiées et donc T est minimale. \square

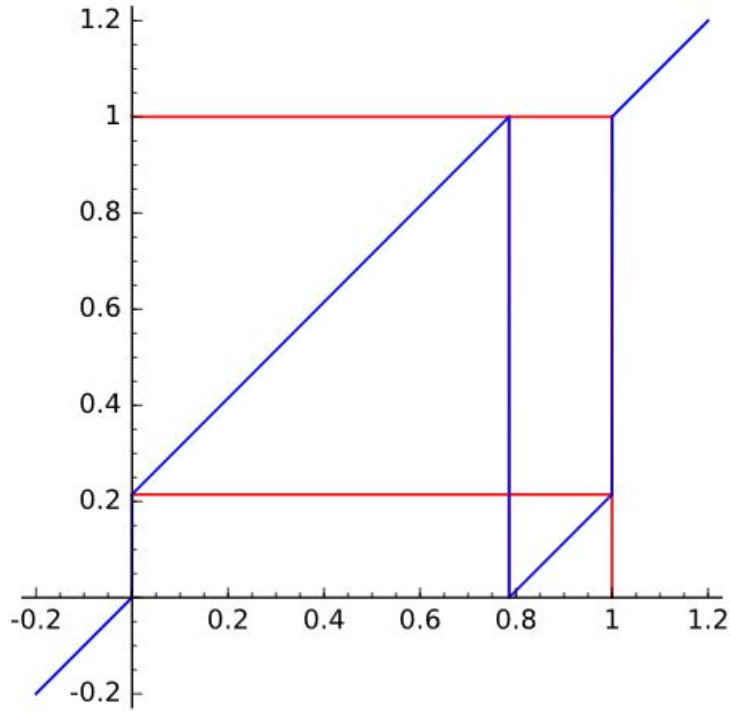
Dans la prochaine partie on détaille deux exemples dont un qui montre que l'on a pas la réciproque du théorème.

1.1.3 Deux exemples

On donne ici deux exemples, un dans le cas $n = 2$ et un autre dans le cas $n = 3$.

Exemple 13. Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ et $\tau = (1 \ 2)$. Alors T est la transformation $Tx = x + \alpha_2[1]$. On a alors que l'orbite d'un point $x \in [0, 1[$ est $\{x + k \times \alpha_2[1]\}$ et cet orbite est dense dans $[0, 1[$ si et seulement si α_2 est irrationnel.

L'ensemble de ces éléments peuvent être vu comme des rotations sur le cercle unité, on les noteras alors $R_{i,1}$ et leur graphique sera toujours de la forme suivante :



$$R_{1-\frac{\pi}{4}, 1} = \text{IET} \left(\left(\frac{\pi}{4}, 1 - \frac{\pi}{4} \right), (2 \ 1) \right).$$

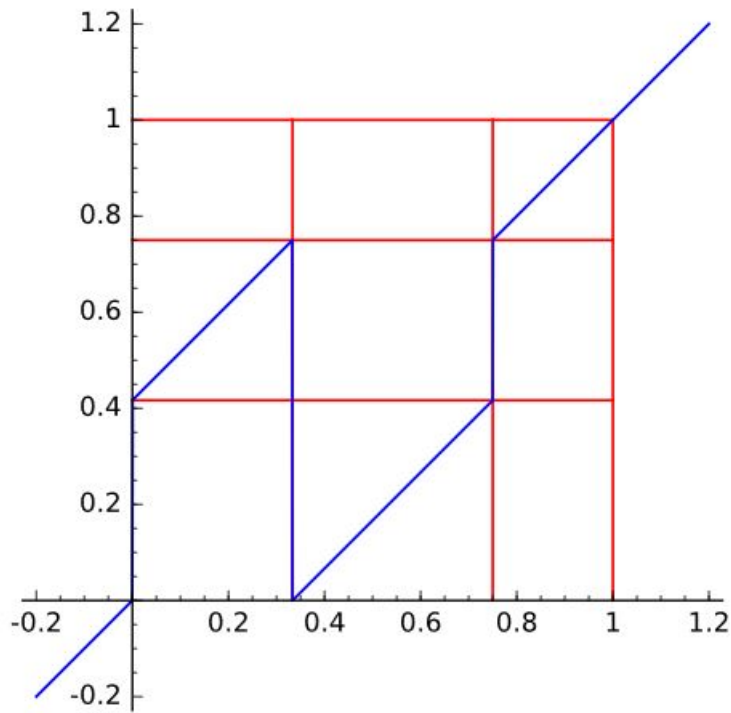
Exemple 14. Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $\tau = (1 \ 3)$, quitte à échanger x par $1-x$ on peut supposer $\alpha_3 \leq \alpha_1$. Soit $X_0 = X_1 \cup X_2$ et on considère la transformation $T_0 : X_0 \rightarrow X_0$ induite par T par : $T_0x = \begin{cases} Tx \text{ si } [x \in X_2] \text{ ou si } [x \in X_1, Tx \in X_2] \\ T^2x \text{ sinon} \end{cases}$.

En décomposant les cas on trouve alors la formule : $T_0x = x + (\alpha_3 - \alpha_1)[\alpha_1 + \alpha_2]$.
Si $x \in X_2$ alors $Tx = \alpha_3 + x - \alpha_1 = x + (\alpha_3 - \alpha_1) = x + (\alpha_3 - \alpha_1)[\alpha_1 + \alpha_2]$.
Si $x \in X_1$ et $Tx \in X_2$ alors $Tx = x + \alpha_3 + \alpha_2 = x + (\alpha_3 - \alpha_1)[\alpha_1 + \alpha_2]$.
Si $x \in X_1$ et $Tx \in X_3$ alors $T^2x \in X_1$. De plus $T_x^2 = Tx - (\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_2 + \alpha_3 + x - (\alpha_1 + \alpha_2) = x + (\alpha_3 - \alpha_1)[\alpha_1 + \alpha_2]$

Ainsi T_0 est minimale si et seulement si $\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{1 - \alpha_3}$ est irrationnel. De plus dans ce cas tout orbite d'un point $x \in X_0$ sous T_0 est incluse dans l'orbite sous T et possède un point aussi proche que l'on veut de tout point de $T^{-1}(X_3) \subset X_1$ et donc l'orbite de x sous T est dense dans X , et réciproquement. Ainsi T est minimale si et seulement si $\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{1 - \alpha_3}$ est irrationnel.

Dans ce dernier exemple on remarque qu'il n'y a pas de condition sur α_2 pour que T soit minimale. On peut donc très bien prendre α_2 rationnel et cela donne un contre-exemple au critère de minimalité 12.

Dans le cas particulier où la transposition a 3 comme point fixe, on se retrouve avec un échange des deux premiers intervalles donc une rotation mais sur un intervalle plus petit, on notera alors $R_{b,a}$ un tel élément où $b = \alpha_2$ et $a = \alpha_1 + \alpha_2$. On parlera aussi de rotation car $R_{b,a}(x) = x + b [a]$.



$$R_{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}} = \text{IET}((1/3, 3/4 - 1/3, 1 - 3/4), (2 \ 1 \ 3)).$$

1.1.4 Construction du Cantor

Soit α, τ comme dans la partie précédente et T une transformation d'échange du (α, τ) -intervalle minimale. On va construire un espace qui est en fait un ensemble de Cantor sur lequel T est un homéomorphisme.

On pose $D^{+\infty} = \bigcup_{i=0}^n \text{Orb}(\beta_i)$ ainsi que X^- une copie de $D^{+\infty} \setminus \{0\}$ et on considère $Y = X \cup X^-$. On étend l'ordre naturel sur X en un ordre linéaire sur Y en plaçant les points x^- de X^- immédiatement à gauche des points correspondants $x \in X$ (et on place 1^- le plus à droite). Cela définit une topologie sur Y et fait de Y un espace métrique compact. De plus T peut être étendu en un homéomorphisme de Y en envoyant x^- sur $\lim_{y \rightarrow x^-} Ty = z^-$, avec z^- sûrement différent de $(Tx)^-$, où $x, z \in D^{+\infty}$.

En fait on a coupé l'intervalle X en plein de petits bouts et on a obtenu un ensemble de Cantor. L'espace Y est donc un espace compact totalement séparé sur lequel T est un homéomorphisme.

Cette remarque permet de justifier le fait que les IET minimales forment un exemple d'une famille plus grande que sont les homéomorphismes minimaux d'un espace X qui est compact totalement séparé dont on reparlera dans la deuxième grande partie.

1.2 Un isomorphisme pour identifier l'abélianisé du groupe des IET

1.2.1 Intermède sur le produit tensoriel

On rappelle ici des résultats importants sur le produit tensoriel sans pour autant les démontrer. On ne justifiera que quelques lemmes que nous utiliserons dans la suite. On se place ici dans le cadre des \mathbb{Q} -module.

Théorème 15. *Soit M, N, R trois \mathbb{Q} -modules. L'application*

$$\begin{cases} \mathcal{L}(M \otimes N, R) & \longrightarrow & \text{Bil}(M, N, R) \\ \phi & \longmapsto & (m, n) \mapsto \phi(m \otimes n) \end{cases} \quad \text{est un isomorphisme.}$$

Dans notre cas on va vouloir représenter des applications bilinéaires alternées. On aura besoin de l'algèbre extérieure. On commence par rappeler ce qu'est l'algèbre tensorielle du module M pour pouvoir donner la définition de l'algèbre extérieure sous forme de quotient.

Définition 16. Soit M un \mathbb{Q} -module. On pose $T^n(M) := \underbrace{M \otimes_{\mathbb{Q}} \dots \otimes_{\mathbb{Q}} M}_{n \text{ fois}}$ puis $T(M) := \bigoplus_{n \geq 0} T^n(M)$. On peut munir $T(M)$ d'une structure d'algèbre et ainsi on appelle $T(M)$ l'algèbre tensorielle du module M .

On note maintenant J_n le sous-module de $T^n(M)$ engendré par les tenseurs purs $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ ayant au moins deux composantes $x_i = x_j$ égales ($J_0 = J_1 = \{0\}$). Puis on pose $J = \bigoplus_{n \geq 0} J_n$. C'est un idéal bilatère et on peut alors passer au quotient.

Définition 17. On appelle algèbre extérieure de M l'algèbre quotient :

$$\bigwedge(M) := T(M)/J$$

On notera \wedge le produit dans $\bigwedge(M)$ de sorte que $[m_1 \otimes \dots \otimes m_n]_{\bigwedge(M)} = m_1 \wedge \dots \wedge m_n$.

Remarque. Nous nous intéresserons qu'à des tenseurs d'ordre 2 et donc en particulier on regardera l'algèbre extérieure d'ordre 2 c'est-à-dire $\bigwedge_{\mathbb{Q}}^2 M := T^2(M)/J_2$.

Proposition 18. *Pour tout x et y dans M on a : $y \wedge x = -x \wedge y$.*

Démonstration. Soit $x, y \in M$. Comme $(x+y) \otimes (x+y) \in J$ alors $(x+y) \wedge (x+y) = 0$. Or comme $x \otimes x$ et $y \otimes y$ sont dans J on a $(x+y) \wedge (x+y) = x \wedge y + y \wedge x$, d'où le résultat. \square

A partir de maintenant on met en avant des propriétés ou des résultats qui nous seront très utiles pour la suite. On pose $M = \mathbb{R}$. La proposition précédente nous donne immédiatement que $x \wedge y - y \wedge x = 2x \wedge y$.

Lemme 19. *l'ensemble $\{x \wedge y - y \wedge x, x, y \in \mathbb{R}\} = \{x \wedge y - y \wedge x, x, y \in [0, 1[\}$ engendre $\bigwedge_{\mathbb{Q}}^2 \mathbb{R}$.*

Démonstration. Comme les $x \otimes y$ engendrent $T^2(\mathbb{R})$ alors les $x \wedge y$ engendrent $\bigwedge_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a vu que $x \wedge y = \frac{1}{2}(x \wedge y - y \wedge x)$ donc est inclus dans le \mathbb{Q} -module engendré par les $x \wedge y - y \wedge x$, ce qui conclut.

Pour pouvoir considérer uniquement des éléments de $[0, 1[$ il faut d'abord montrer que l'on peut prendre des positifs. Soit $x, y \in \mathbb{R}$, s'ils sont positifs c'est bon. S'ils sont tous les deux négatifs alors en appliquant deux fois la proposition 18 on trouve que $x \wedge y = (-x) \wedge (-y)$. Si $x > 0$ et $y < 0$ alors il suffit de dire que $y = px + r$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, x[$ et ainsi $x \wedge y = x \wedge r$. Pour pouvoir prendre des éléments de $[0, 1[$,

en supposant que $0 < x < y$, il suffit d'écrire $x = \sum_{k \geq 1} \epsilon_k \frac{y}{2^k}$ avec $\epsilon_k \in \{0, 1\}$. Il existe un certain rang N tel que $u := \sum_{k \geq N} \epsilon_k \frac{y}{2^k} < 1$. Et ainsi $x \wedge y = u \wedge y$, il suffit pour conclure d'écrire $y = pu + r$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, u[$. \square

1.2.2 L'isomorphisme

Dans cette partie, pour des raisons de commodité de calcul et d'écriture, on note G l'ensemble des transformations d'échanges d'intervalles que l'on voit inclus dans l'ensemble des bijections de \mathbb{R} , de pente $+1$, qui est l'identité en dehors de l'intervalle borné $[0, 1[$, qui est continue à droite en tout point, et continue à gauche sauf en un nombre fini de points. On précisera qu'un élément $f \in G$ est une transformation d'échange du (α, τ) -intervalle quand on en aura besoin. On gardera aussi les notations pour les points de discontinuités β_i et les intervalles X_i associés à f ainsi que leurs images X_i^τ et β_i^τ .

Remarque. On rappelle que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq b < a \leq 1$, $R_{b,a}$ la rotation d'angle b sur l'intervalle $[0, a[$, qui est l'identité hors de cette intervalle, c'est bien un élément de G et son graphe est donné dans l'exemple 14.

Théorème 20. *Il existe un morphisme non trivial :*

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \widehat{f} \end{aligned}$$

tel que $\widehat{R_{b,a}} = b \otimes a - a \otimes b$ pour tous a, b tels que $0 < a \leq 1$ et $0 \leq b < a$.

Démonstration.

Soit $f \in G$. On pose $\bar{f}(x) = f(x) - x$, \bar{f} ne prend qu'un nombre fini de valeurs, est constant sur un nombre fini d'intervalles et nul en dehors d'un compact. Cela a donc un sens de poser en appelant m la mesure de Lebesgue :

$$\widehat{f} = \sum_{a \in \mathbb{R}} a \otimes_{\mathbb{Q}} m[\bar{f}^{-1}(a)]$$

On regarde comment se comporte la composition. Soit $g \in G$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\overline{g \circ f}(x) = g \circ f(x) - x = g \circ f(x) - f(x) + f(x) - x = \bar{g} \circ f + \bar{f}$. D'où $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ f + \bar{f}$. On en déduit : $\widehat{g \circ f} = \sum_{a \in \mathbb{R}} a \otimes m[\overline{g \circ f}^{-1}(a)] = \sum_{a \in \mathbb{R}} a \otimes m[(\bar{g} \circ f + \bar{f})^{-1}(a)]$. Comme

$$(\bar{g} \circ f + \bar{f})^{-1}(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid \bar{g} \circ f + \bar{f}(x) = a\} = \bigsqcup_{\substack{b, c \in \mathbb{R} \\ b+c=a}} \{x \mid \bar{g} \circ f(x) = b, \bar{f}(x) = c\} =$$

$$\bigsqcup_{\substack{b, c \in \mathbb{R} \\ b+c=a}} (\bar{g} \circ f)^{-1}(b) \cap \bar{f}^{-1}(c) \text{ et que } \bigcup_b (\bar{g} \circ f)^{-1}(b) = \bigcup_c \bar{f}^{-1}(c) = \mathbb{R} \text{ on obtient :}$$

$$\begin{aligned} \widehat{g \circ f} &= \sum_{b, c \in \mathbb{R}} (b+c) \otimes m[(\bar{g} \circ f)^{-1}(b) \cap \bar{f}^{-1}(c)] \\ &= \sum_b b \otimes m[(\bar{g} \circ f)^{-1}(b)] + \sum_c c \otimes m[\bar{f}^{-1}(c)] \\ &= \sum_b b \otimes m[(f^{-1} \circ \bar{g}^{-1})(b)] + \sum_c c \otimes m[\bar{f}^{-1}(c)] \\ &= \widehat{g} + \widehat{f} \end{aligned}$$

Car f préserve la mesure. On remarque que $\widehat{id} = 0$ car $\overline{id} = 0$. D'où $\widehat{f \circ f^{-1}} = 0 = \widehat{f} + \widehat{f^{-1}}$ donc $\widehat{f^{-1}} = -\widehat{f}$. Ainsi l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est un morphisme.

En particulier pour $R_{b,a}$ on ajoute b sur l'intervalle $[0, a - b[$ et on ajoute $b - a$ sur l'intervalle $[a - b, a[$. D'où $\widehat{R_{b,a}} = b \otimes (a - b) + (-(a - b)) \otimes b = b \otimes a - a \otimes b$. \square

On démontre maintenant le lemme suivant qui donne l'unicité du morphisme précédent :

Lemme 21. G est engendré par les $R_{b,a}$ pour $0 \leq b < a \leq 1$.

Démonstration.

Soit $f \in G$ une transformation d'échange du (α, τ) -intervalle avec α un k -uplet. On note X_i les intervalles associés et β_i les sommes associées, ainsi que X_i^τ et β_i^τ les nouveaux éléments une fois qu'on a appliqué une fois f . On commence par faire une remarque qui nous permet de simplifier un peu les calculs et de regarder l'image de points éloignés des points de discontinuités. Cela m'a permis entre autre de créer plus facilement un algorithme sans m'occuper des erreurs d'arrondis informatique afin de vérifier de manière heuristique que le théorème est vrai.

Remarque. Dans la suite, avec les rotations que l'on considèrera, on aura toujours que tous les points d'un même X_i sont du "même côté de la rotation" c'est-à-dire que $R_{b,a}(X_i)$ est un intervalle pour tout i (et la rotation est même un homéo de X_i sur son image). Cela est vrai simplement car les points de singularité des rotations considérées seront aussi des points de singularité de f . Ainsi quand on regardera $R_{b,a}(x) - R_{b,a}(y)$ avec $x, y \in X_i$ on a directement que c'est égal à $x - y$. De plus cela nous permet aussi de savoir quelle sera la distance à ajouter en tout point du X_i pour le bon i . On s'intéressera donc pour ϵ positif, petit, à la valeur $\beta_i^\tau - \epsilon - R_{b,a}(\beta_{\tau^{-1}(i)} - \epsilon)$

On va écrire f comme une composition de k rotations $R^i = R_{b_i, a_i}$ telle que la suite $(a_i)_i$ est décroissante. Cela permet d'obtenir un intervalle qui une fois modifié par une rotation ne soit plus modifié par les suivantes. Pour cela on regarde quel intervalle a été envoyé sur le dernier intervalle c'est-à-dire que l'on s'intéresse à $X_{\tau^{-1}(k)}$ car il est envoyé sur X_k^τ . Sur cet intervalle f agit comme la rotation $R_{\beta_k^\tau - \beta_{\tau^{-1}(k)}, \beta_k^\tau}$ que l'on notera R^0 . Ensuite on regarde l'intervalle qui est envoyé sur l'avant-dernier intervalle, c'est-à-dire que l'on s'intéresse à $X_{\tau^{-1}(k-1)}$ car il est envoyé sur X_{k-1}^τ . On a envie de faire comme précédemment et dire que sur cet intervalle f agit comme la rotation $R_{\beta_{k-1}^\tau - \beta_{\tau^{-1}(k-1)}, \beta_{k-1}^\tau}$. Seulement on voit immédiatement deux problèmes. Tout d'abord la borne de l'intervalle de la rotation n'a pas baissé pour cela il suffit de mettre β_{k-1}^τ car on a déjà placé correctement l'image de $X_{\tau^{-1}(k)}$ sur X_k^τ . Ensuite notre point $\beta_{\tau^{-1}(k-1)}$ a déjà été bougé par R^0 et il ne contrôle peut être plus la distance voulue car $\beta_{\tau^{-1}(k-1)} \notin X_{\tau^{-1}(k-1)}$ et donc $R^0(\beta_{\tau^{-1}(k-1)})$ n'est peut être pas égal à $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} R^0(\beta_{\tau^{-1}(k-1)} - \epsilon)$. Ainsi on fixe ϵ positif petit et on va plutôt regarder

$R_{\beta_{k-1}^\tau - \epsilon - R^0(\beta_{\tau^{-1}(k-1)} - \epsilon), \beta_{k-1}^\tau}$ que l'on note R^1 .

On va maintenant vérifier que $R^1 \circ R^0$ est bien égal à f sur $X_{\tau^{-1}(k)} \cup X_{\tau^{-1}(k-1)}$. C'est-à-dire que l'on va montrer que sur $X_{\tau^{-1}(k)}$ c'est R^0 et donc f , puis que sur $X_{\tau^{-1}(k-1)}$ elle est égale à $x \mapsto x - \beta_{\tau^{-1}(k-1)} + \beta_{k-2}^\tau$ qui correspond bien à ce que fait f .

La première vérification est claire car $R^0(X_{\tau^{-1}(k)}) = [\beta_{k-1}^\tau, \beta_k^\tau[$ et que R^1 est une rotation qui est l'identité au delà de β_{k-1}^τ .

Pour la seconde vérification. Soit $x \in X_{\tau^{-1}(k-1)} = [\beta_{\tau^{-1}(k-1)-1}, \beta_{\tau^{-1}(k-1)}[$. On utilise ici la remarque ainsi que l'égalité $\alpha_i = \ell(X_i) = \ell(X_{\tau(i)}^\tau)$, où ℓ désigne la longueur.

$$\begin{aligned}
R^1 \circ R^0(x) &= \beta_{k-1}^\tau - \epsilon - R^0(\beta_{\tau^{-1}(k-1)} - \epsilon) + R^0(x) && [\beta_{k-1}^\tau] \\
&= \beta_{k-1}^\tau - \epsilon + x - (\beta_{\tau^{-1}(k-1)} - \epsilon) && [\beta_{k-1}^\tau] \\
&= \beta_{k-1}^\tau + x - \beta_{\tau^{-1}(k-1)} && [\beta_{k-1}^\tau] \\
&= \beta_{k-1}^\tau + x - \beta_{\tau^{-1}(k-1)-1} + \beta_{\tau^{-1}(k-1)-1} - \beta_{\tau^{-1}(k-1)} && [\beta_{k-1}^\tau] \\
&= \beta_{k-1}^\tau + x - \beta_{\tau^{-1}(k-1)-1} - \alpha_{\tau^{-1}(k-1)} && [\beta_{k-1}^\tau] \\
&= x - \beta_{\tau^{-1}(k-1)-1} + \beta_{k-1}^\tau - (\beta_{k-1}^\tau - \beta_{k-2}^\tau) && [\beta_{k-1}^\tau] \\
&= x - \beta_{\tau^{-1}(k-1)-1} + \beta_{k-2}^\tau && [\beta_{k-1}^\tau]
\end{aligned}$$

Et cela est vrai même sans le modulo car $x - \beta_{\tau^{-1}(k-1)-1} + \beta_{k-2}^\tau$ vit dans $[\beta_{k-2}^\tau, \beta_{k-1}^\tau[$. On a donc bien montré que f est égale à $R^1 \circ R^0$ sur $X_{\tau^{-1}(k)} \cup X_{\tau^{-1}(k-1)}$.

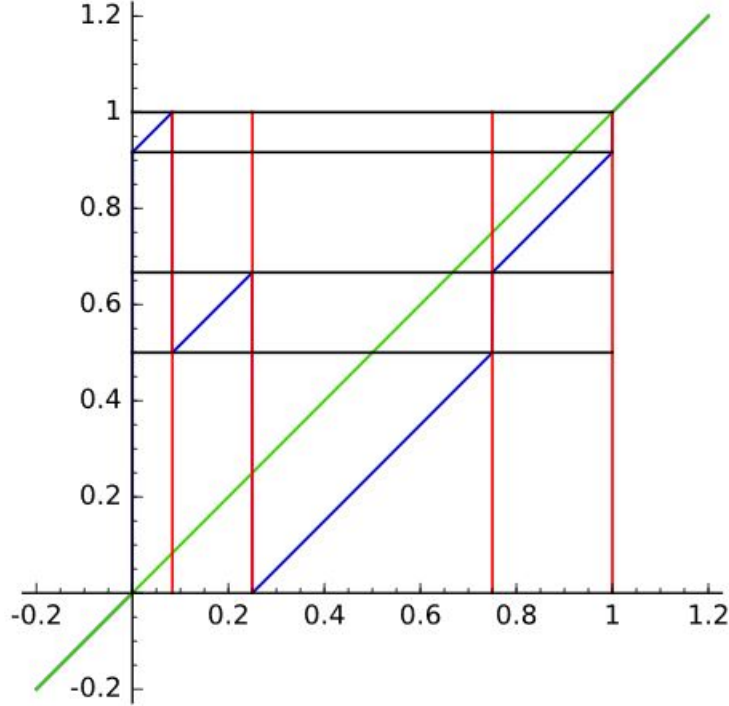
Pour finir de démontrer le lemme on définit par récurrence les $R^i = R_{w_i, \delta_i}$ par $\delta_0 = \beta_k^\tau$, $w_0 = (\delta_0 - \epsilon) - (\beta_{\tau^{-1}(k)} - \epsilon)$ et $\delta_i = \beta_{k-i}^\tau$, $w_i = \delta_i - \epsilon - R^{i-1} \circ R^{i-2} \circ \dots \circ R^0(\beta_{\tau^{-1}(k-i)} - \epsilon)$. Le ϵ étant choisit petit par rapport à la plus petit longueur des intervalles X_i . Puis avec une récurrence immédiate on déduit qu'à l'étape i on a (au moins!) $f =$

$R^i \circ R^{i-1} \circ \dots \circ R^0$ sur $X_{\tau^{-1}(k)} \cup X_{\tau^{-1}(k-1)} \cup \dots \cup X_{\tau^{-1}(k-i)}$.

Ainsi f est égale à une composition de rotation sur tout $X = [0, 1[$ et comme tout ces éléments sont dans G alors ils sont l'identité en dehors de X d'où f est égale à une composition de rotations partout. On remarque aussi que notre décomposition comprend exactement k rotations. \square

Exemple 22.

La preuve de ce théorème est constructive. Et de plus on peut très facilement lire cette décomposition sur un graphe d'un IET. en reprenant l'exemple du paragraphe sur le graphe d'une IET : $f = ((1/12, 1/6, 1/2, 3/12), (4 \ 2 \ 1 \ 3))$.



On lit tout d'abord que $R^0 = R_{\frac{11}{12}, 1}$ puis comme $\frac{11}{12} - R^0(1) = 0$ que $R^1 = R_{0, \frac{11}{12}} = id$. Puis comme $\frac{2}{3} - R^1(R^0(\frac{3}{12})) = \frac{1}{2}$ alors $R^2 = R_{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}}$ et finalement on a $R^2(R^1(R^0(\frac{9}{12}))) = 0$ d'où $R^4 = R_{0, \frac{1}{2}} = id$. Ainsi $f = R^2 \circ R^0$.

Remarque. On en déduit que le morphisme est à valeurs dans $\Lambda_{\mathbb{Q}}^2 \mathbb{R}$ car l'image de la famille génératrice est dedans. C'est un groupe commutatif et ainsi son noyau contient le groupe des commutateurs $[G, G]$ qui est un sous-groupe distingué.

Nous allons montrer que le morphisme induit entre $G/[G, G]$ et $\Lambda_{\mathbb{Q}}^2 \mathbb{R}$ est un isomorphisme. A tout élément $f \in G$ on associe sa classe dans $G/[G, G]$ notée \tilde{f} . Comme on arrive dans un groupe commutatif on utilisera la notation additive : $\widetilde{f \circ g} = \tilde{f} + \tilde{g}$. En composant à gauche par la projection sur l'algèbre extérieure puis en utilisant le fait que le groupe des commutateurs est inclus dans le noyau du morphisme on peut considérer le morphisme suivant :

$$\Phi : \begin{cases} G/[G, G] & \longrightarrow \Lambda_{\mathbb{Q}}^2 \mathbb{R} \\ \tilde{f} & \longmapsto [\tilde{f}]_{\Lambda(\mathbb{R})} \end{cases}$$

On a alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq b < a \leq 1$, $\Phi(R_{b,a}) = b \wedge a - a \wedge b$ et $\Phi(R_{b,a}^{-1}) = \Phi(R_{a-b,a}) = a \wedge b - b \wedge a$. Par le lemme 19 on obtient que Φ est surjective.

On peut maintenant montrer l'injectivité de Φ et pour se faire on va construire un inverse.

Définition 23. Pour $a \in]0, 1]$ on pose :

$$\Psi_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & G/D(G) \\ b & \longmapsto & \widetilde{R_{a\{\frac{b}{a}\},a}} \end{cases}$$

De plus on pose $\Psi_0 = 0$.

Remarque. L'élément $\{\frac{b}{a}\}$ est la partie fractionnaire de $\frac{b}{a}$. On a alors que $a\{\frac{b}{a}\}$ est le représentant de b modulo a dans $[0, a[$, en effet si $b = aq + r$ avec $r \in [0, a[$ alors $\frac{b}{a} = q + \frac{r}{a}$ et donc $a\{\frac{b}{a}\} = a\frac{r}{a} = r$.

De plus pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\Psi_a(na) = 0$ et même $\Psi_a(b + na) = \Psi_a(b)$.

Proposition 24. Pour tout $a \in [0, 1]$ l'application Ψ_a est bien définie et est linéaire.

Démonstration.

L'application est bien définie par la remarque et le fait que $a \in]0, 1]$. Soit $b, c \in \mathbb{R}$. On note $b = aq + r$ et $c = ap + s$ avec $r, s \in [0, a[$. Ainsi $a\{\frac{b+c}{a}\} = a\{\frac{r+s}{a}\} = r + s - \epsilon a$ avec $\epsilon \in \{0, 1\}$. D'où $\Psi_a(b + c) = \widetilde{R_{r+s-\epsilon a, a}}$.

Si $\epsilon = 0$ on a directement que $R_{r+s, a} = R_{r, a} \circ R_{s, a}$ et donc que $\Psi_a(b + c) = \Psi_a(b) + \Psi_a(c)$.

Si $\epsilon = 1$ alors pour tout $x \in [0, 1[$, $R_{r+s-a, a}(x) = x + r + s - a[1] = R_{s, a}(x) + r[1] = R_{r, a} \circ R_{s, a}(x)$. et donc on a encore $R_{r+s-a, a} = R_{r, a} \circ R_{s, a}$, d'où $\Psi_a(b + c) = \Psi_a(b) + \Psi_a(c)$. Donc ψ_a est linéaire. \square

On va vouloir une linéarité en la variable a . Seulement elle n'est pas encore accessible partout, on montre pour l'instant le lemme suivant qui nous assure une certaine linéarité pour des petits a . C'est ici que l'hypothèse d'être dans l'abélianisé intervient. On a besoin de plusieurs lemmes avant de conclure.

Proposition 25. Pour tout $b \in [0, 1[$ tel que $2b \in [0, 1]$, on a $R_{b, 2b} \in D(G)$.

Démonstration.

La rotation envoie $[0, b[$ sur $[b, 2b[$ mais plus précisément elle envoie $[0, \frac{b}{2}[$ sur $[b, b + \frac{b}{2}[$ et $[\frac{b}{2}, b[$ sur $[b + \frac{b}{2}, 2b[$. On considère alors l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} R_{b, 2b}(x) & x \in [\frac{b}{2}, b[\cup [b + \frac{b}{2}, 2b[\\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On a $f \in G$ de plus $f^2 = id$ donc $f = f^{-1}$. On pose $g = R_{\frac{b}{2}, 1}$ et on vérifie que $g^{-1} \circ f \circ g$ est la rotation d'angle b sur $[0, \frac{b}{2}[\cup [b, b + \frac{b}{2}[$.

Soit $x \in [0, \frac{b}{2}[$ alors $g(x) = x + \frac{b}{2} \in [\frac{b}{2}, b[$ donc $f(g(x)) = x + b + \frac{b}{2} \in [b + \frac{b}{2}, 2b[$ et ainsi $g^{-1}(f(g(x))) = x + b$.

Soit $x \in [b, b + \frac{b}{2}[$ alors $g(x) = x + \frac{b}{2} \in [b + \frac{b}{2}, 2b[$ donc $f(g(x)) = x + b + \frac{b}{2}[2b] = x + \frac{b}{2} - b \in [0, \frac{b}{2}[$ et ainsi $g^{-1}(f(g(x))) = x - b$.

Pour x ailleurs que dans ces deux intervalles on a $g(x) \notin [\frac{b}{2}, b[\cup [b + \frac{b}{2}, 2b[$ donc

$f(g(x)) = g(x)$ et ainsi $g^{-1}(f(g(x))) = x$.

Cela conclut car on a alors $R_{b,2b} = f \circ g^{-1} \circ f \circ g$ et en rappelant que $f = f^{-1}$ on en déduit que c'est bien un commutateur. \square

Proposition 26.

Soit $0 < b < \min\{a, a'\}$ tels que $a + a' \in [0, 1]$.

1. On vérifie que $u := R_{b,a'}^{-1} \circ R_{b,a+a'}$ est une rotation d'angle b sur $[a' - b, a + a']$, qui est conjuguée à $R_{b,a+b}$.
2. De plus soit v la composition de $R_{b,a+b}$ par la rotation d'angle b sur $[a - b, a + b]$, noté h , (qui est conjuguée à $R_{b,2b}$) alors v est égale à $R_{b,a}$

Démonstration.

1. Soit $x \in [0, a' - b[$ alors $R_{b,a+a'}(x) = x + b \in [b, a'[$ d'où $u(x) = x + b + a' - b[a'] = x$
 Soit $x \in [a' - b, a + a' - b[$ alors $R_{b,a+a'}(x) = x + b \in [a', a + a'[$ d'où $u(x) = x + b$.
 Soit $x \in [a + a' - b, a + a'[$ alors $R_{b,a+a'}(x) = x + b[a + a'] = x + b - a - a' \in [0, b[$
 d'où $u(x) = x + b - a - a' + a' - b[a'] = x - a \in [a' - b, a'[$
 En dehors de ces cas c'est l'identité. On retrouve bien la rotation souhaitée.
 De plus, on ne le referra pas car c'est une preuve du même type que celle faite dans la proposition 25, on vérifie que $R_{b,a+b} = R_{a'-b,1}^{-1} \circ u \circ R_{a'-b,1}$.
2. Encore une fois ici le fait que la rotation d'angle b sur $[a - b, a + b[$ est conjugué à $R_{b,2b}$ par $R_{a-b,1}$ est clair.
 Soit $x \in [0, a - b[$ alors $h(x) = x$ et donc $v(x) = x + b$.
 Soit $x \in [a - b, a[$ alors $h(x) = x + b \in [a, a + b[$ donc $v(x) = x + 2b[a + b] = x + b - a \in [0, b[$.
 En dehors de ces cas c'est l'identité et on retrouve la rotation $R_{b,a}$. \square

Lemme 27. Pour tout $a, a' \in [0, 1]$ tels que $a + a' \in [0, 1]$ on a $\Psi_{a+a'} = \Psi_a + \Psi_{a'}$.

Démonstration.

Le cas où a ou a' ou les deux valent 0 est évident. On suppose que $a \neq 0$ et $a' \neq 0$. Soit $a, a' \in [0, 1]$ tels que $a + a' \in [0, 1]$ et $b \in \mathbb{R}$, quitte à changer b en $b + ka$ avec $k \in \mathbb{Z}$ on peut supposer $b \geq 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{b}{n} \in [0, \min\{a, a'\}]$. On note $b' = \frac{b}{n}$ et on en déduit que $(a + a')\{\frac{b'}{a+a'}\} = b'$. On remarque que $2b' \leq a + a' \leq 1$. On regarde $\Psi_{a+a'}(b') = R_{b',a+a'}$. On se retrouve alors dans les conditions de la proposition 26. Ainsi :

$$\begin{aligned} R_{b',a+a'} &= R_{b',a'} \circ u \\ &= R_{b',a'} \circ R_{a'-b',1} \circ R_{b',a+b'} \circ R_{a'-b',1}^{-1} \\ &= R_{b',a'} \circ R_{a'-b',1} \circ v \circ h^{-1} \circ R_{a'-b',1}^{-1} \\ &= R_{b',a'} \circ R_{a'-b',1} \circ R_{b',a} \circ R_{a-b',1} \circ R_{b',2b'} \circ R_{a-b',1}^{-1} \circ R_{a'-b',1}^{-1} \end{aligned}$$

D'où en prenant le tilde on a : $\widetilde{R_{b',a+a'}} = \widetilde{R_{b',a'}} + \widetilde{R_{b',a}} + \widetilde{R_{b',2b'}}$. On conclut alors en utilisant la proposition 25 et le fait qu'on soit dans l'abélianisé pour dire que $\widetilde{R_{b',2b'}} = 0$. Ainsi comme $a\{\frac{b'}{a}\} = a'\{\frac{b'}{a'}\} = b'$ alors $\Psi_{a+a'}(\frac{b}{n}) = \Psi_a(\frac{b}{n}) + \Psi_{a'}(\frac{b}{n})$. On peut alors tout multiplier par n et par linéarité en la variable b on en déduit que $\Psi_{a+a'}(b) = \Psi_a(b) + \Psi_{a'}(b)$. \square

On veut étendre la définition pour tout $a \in \mathbb{R}$. Comme on sait que l'on voudrait partir de $\bigwedge_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})$, on va essayer de mettre les propriétés de cet espace en évidence. On commence donc par poser $\Psi_{-a}(b) = \Psi_a(-b)$.

Lemme 28. Soit a et $\lambda \in \mathbb{Q}$ tels que $|a| \leq 1$ et $|\lambda a| \leq 1$. Alors $\Psi_{\lambda a}(b) = \Psi_a(\lambda b)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = \frac{n}{m}$. Alors comme $|\lambda a| \leq 1$ et donc $|\frac{a}{m}| \leq 1$. La linéarité du lemme précédent et la linéarité en b s'appliquent et on obtient $\Psi_{\frac{n}{m}a}(b) = n\Psi_{\frac{a}{m}}(b) = \Psi_{\frac{a}{m}}(nb)$. De plus comme $|a| \leq 1$ alors $\Psi_a(nb) = \Psi_{m\frac{a}{m}}(nb) = m\Psi_{\frac{a}{m}}(nb)$. On déduit alors que $\Psi_{\frac{n}{m}a}(b) = \Psi_{\frac{a}{m}}(nb) = \frac{1}{m}\Psi_a(nb) = \Psi_a(\lambda b)$. \square

On peut enfin définir une application sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

Définition 29. On pose :

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & G/D(G) \\ (b, a) & \longmapsto & \Psi_{\frac{a}{\lceil |a| \rceil}}(b \lceil |a| \rceil) \end{cases}$$

Où $\lceil |a| \rceil$ représente la partie entière supérieur de $|a|$.

Proposition 30. ψ est linéaire à gauche.

Démonstration. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\Psi_{\frac{a}{\lceil |a| \rceil}}$ l'est : $\psi(b + c, a) = \Psi_{\frac{a}{\lceil |a| \rceil}}(b \lceil |a| \rceil + c \lceil |a| \rceil) = \Psi_{\frac{a}{\lceil |a| \rceil}}(b \lceil |a| \rceil) + \Psi_{\frac{a}{\lceil |a| \rceil}}(c \lceil |a| \rceil) = \psi(b, a) + \psi(c, a)$. \square

Proposition 31. Pour tout $(b, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\psi(b, -a) = -\psi(b, a)$.

Démonstration. En effet $\psi(b, -a) = \Psi_{\frac{-a}{\lceil |a| \rceil}}(b \lceil |a| \rceil) = \Psi_{\frac{a}{\lceil |a| \rceil}}(-b \lceil |a| \rceil) = \psi(-b, a)$. De plus ψ est linéaire à gauche donc $\psi(0, a) = 0 = \psi(b - b, a) = \psi(b, a) + \psi(-b, a)$. Ainsi $\psi(b, -a) = \psi(-b, a) = -\psi(b, a)$. \square

Proposition 32. ψ est linéaire à droite.

Démonstration. On montre d'abord la linéarité à droite dans un cas précis. Soit $a \geq 0$, $a' \geq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Comme $\frac{a}{\lceil |a+a'| \rceil}$ et $\frac{a'}{\lceil |a+a'| \rceil}$ sont plus petits que 1, alors $\psi(b, a + a') = \Psi_{\frac{a+a'}{\lceil |a+a'| \rceil}}(b \lceil |a + a'| \rceil) = \Psi_{\frac{a}{\lceil |a+a'| \rceil}}(b \lceil |a + a'| \rceil) + \Psi_{\frac{a'}{\lceil |a+a'| \rceil}}(b \lceil |a + a'| \rceil)$.

Il reste encore à constater que $\frac{a}{\lceil |a+a'| \rceil} = \frac{a}{\lceil |a| \rceil} \times \frac{\lceil |a| \rceil}{\lceil |a+a'| \rceil}$ puis dire que $\frac{\lceil |a| \rceil}{\lceil |a+a'| \rceil} \in \mathbb{Q}$ et que $|\frac{\lceil |a| \rceil}{\lceil |a+a'| \rceil}| \leq 1$ ainsi que $|\frac{a}{\lceil |a| \rceil}| \leq 1$. On peut alors appliquer le lemme 28 et on obtient $\Psi_{\frac{a}{\lceil |a+a'| \rceil}}(b \lceil |a + a'| \rceil) = \Psi_{\frac{a}{\lceil |a| \rceil}}(b \lceil |a| \rceil)$. De même on obtient $\Psi_{\frac{a'}{\lceil |a+a'| \rceil}}(b \lceil |a + a'| \rceil) = \Psi_{\frac{a'}{\lceil |a'| \rceil}}(b \lceil |a'| \rceil)$. D'où $\psi(b, a + a') = \Psi_{\frac{a}{\lceil |a| \rceil}}(b \lceil |a| \rceil) + \Psi_{\frac{a'}{\lceil |a'| \rceil}}(b \lceil |a'| \rceil) = \psi(b, a) + \psi(b, a')$. Donc ψ est linéaire à droite dans ce cas.

En fait on montre que cela suffit pour avoir ψ linéaire à droite partout. En effet si $a \leq 0$ et $a' \leq 0$ alors $\psi(b, a + a') = \psi(-b, -a + (-a')) = \psi(-b, -a) + \psi(-b, -a') = \psi(b, a) + \psi(b, a')$.

On suppose maintenant que $a \leq 0$ et $a' \geq 0$ quitte à considérer $-a - a'$ on peut supposer $a + a' \geq 0$. On a alors $a' \geq a$ et ainsi $\psi(b, a') = \psi(b, a' + a - a) = \psi(b, a' + a) + \psi(b, -a) = \psi(b, a' + a) - \psi(b, a)$. Donc $\psi(b, a' + a) = \psi(b, a') + \psi(b, a)$ ce qui conclut. \square

Comme ψ est bilinéaire on peut rentrer dans le monde tensoriel et voir ψ comme une application définie sur $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$. Il se trouve aussi que ψ est surjective car tous les $\widetilde{R_{b,a}}$, pour $0 \leq b < a \leq 1$, sont atteints et par le lemme 21 on sait que $G/[G, G]$ est engendré par ces éléments. Il reste à voir que l'on peut factoriser ψ pour avoir l'algèbre extérieure comme ensemble de départ. Pour cela il suffit de voir que l'ensemble $\{a \otimes a, a \in \mathbb{R}\}$ est dans le noyau de ψ . En effet par linéarité à droite $\psi(a, a) = \Psi_{\frac{a}{\lceil |a| \rceil}}(a \lceil |a| \rceil) = \lceil |a| \rceil^2 \Psi_{\frac{a}{\lceil |a| \rceil}}(\frac{a}{\lceil |a| \rceil}) = 0$. Ainsi on obtient une application que l'on note toujours ψ qui va de $\Lambda_{\mathbb{Q}}^2 \mathbb{R}$ dans $G/[G, G]$. On définit l'application suivante :

$$\left(\frac{1}{2}\psi\right) : \begin{cases} \Lambda_{\mathbb{Q}}^2 \mathbb{R} & \longrightarrow & G/[G, G] \\ b \wedge a & \longmapsto & \psi\left(\frac{b}{2} \wedge a\right) \end{cases}$$

Ainsi pour $0 \leq b < a \leq 1$ on a :

$$\left(\frac{1}{2}\psi\right)(\Phi(\widetilde{R_{b,a}})) = \left(\frac{1}{2}\psi\right)(b \wedge a - a \wedge b) = \left(\frac{1}{2}\psi\right)(2b \wedge a) = \psi(b \wedge a) = \widetilde{R_{b,a}}$$

Comme les $\widetilde{R_{b,a}}$ engendrent $G/[G, G]$ alors $\left(\frac{1}{2}\psi\right)(\Phi(\widetilde{R_{b,a}})) = id$. Ainsi on a trouver un inverse à Φ à gauche donc Φ est injective. On conclut que Φ est un isomorphisme.

2 Le cas des systèmes de Cantor minimaux

2.1 Autour des systèmes de Cantor

L'objectif maintenant est d'introduire la notion de système de Cantor ainsi que celle de groupe plein topologique et de comprendre la structure de ce groupe. En particulier on s'intéressera à l'abélianisé du groupe plein topologique dans le cadre d'un système minimal.

2.1.1 Définitions

Définition 33. On appelle espace de Cantor un espace topologique homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor. C'est un espace métrisable compact et totalement discontinu. On pourra voir X comme l'espace $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Un système de Cantor minimal est la pair d'un espace de Cantor X et d'un homéomorphisme minimal $\phi \in \text{Homéo}(X)$.

Remarque. Dans notre cas une base de la topologie est donnée par l'ensemble des clouverts de X , où un clouvert est un ensemble à la fois ouvert et fermé de X . On dit alors que X est 0-dimensionnel.

Définition 34. Soit (X, ϕ) un système de Cantor minimal.

1. Le groupe plein $[\phi]$ de (X, ϕ) est le sous-groupe des homéomorphismes de X définit comme : $[\phi] = \{\gamma \in \text{Homeo}(X) \mid \gamma(x) = \phi^{n(x)}(x), n(x) \in \mathbb{Z}, x \in X\}$.
2. Le groupe plein topologique $[[\phi]]$ de (X, ϕ) est le sous-groupe des homéomorphismes de X tels que l'application n associée est continue. Dans notre cas comme X est compact si l'application n est continue alors elle est bornée.
3. Pour tout $x \in X$ on note $[[\phi]]_x$ le sous-groupe des éléments $\gamma \in [[\phi]]$ qui préserve l'orbite positive de x et l'orbite négative de x respectivement.

Afin d'étudier ces groupes on a besoin d'introduire un autre groupe qui nous sera plus facile de manipuler.

2.1.2 Le groupe $[[\phi]]_0$

Soit $x \in X$. Comme on a supposé que (X, ϕ) était minimal on sait que l'orbite de x est infinie. On pose :

$$\text{mod } x : \begin{cases} [[\phi]] & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ \psi & \longmapsto \#(O^-(x) \cap \psi^{-1}(O^+(x))) - \#(O^+(x) \cap \psi^{-1}(O^-(x))) \end{cases}$$

Cette application mesure globalement le transfert d'éléments qui sont passé de l'orbite négative dans l'orbite positive. Comme on a $\psi \in [[\phi]]$ alors il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\psi(\phi^n(x)) \in O^+(x)$ et $\psi(\phi^{-n}(x)) \in O^-(x)$ ainsi $\text{mod } x(\psi)$ est bien un entier.

Proposition 35. *L'application $\text{mod } x$ est un morphisme de groupes et ne dépend pas du choix de x dans son orbite. On a $\text{mod } x(\phi) = 1$ si bien que $\text{mod } x$ est surjectif. De plus en munissant $\text{Hom}([[\phi]], \mathbb{Z})$ de la convergence ponctuelle, l'application $x \mapsto \text{mod } x$ définie sur la réunion des orbites infinies est continue.*

Démonstration.

On montre d'abord que $\text{mod } x$ est un morphisme.

On note pour tout $\psi \in [[\phi]]$, $A_\psi = O^-(x) \cap \psi^{-1}(O^+(x))$ et $B_\psi = O^+(x) \cap \psi^{-1}(O^-(x))$.

Soit $\psi_1, \psi_2 \in [[\phi]]$. Soit $x \in A_{\psi_1 \circ \psi_2}$ alors $x \in O^-(x)$ et on a 2 cas :

1. Soit $\psi_2(x) \in O^-(x)$ et alors $\psi_2(x) \in A_{\psi_1}$ et $x \notin A_{\psi_2}$.
En fait cela correspond à l'ensemble $\{y \in A_{\psi_1} \mid \psi_2^{-1}(y) \in O^-(x)\}$ ce qui est $A_{\psi_1} \setminus \{y \in A_{\psi_1} \mid \psi_2^{-1}(y) \in O^+(x)\} = A_{\psi_1} \setminus \{y \in B_{\psi_2} \mid \psi_2(y) \in A_{\psi_1}\}$.

2. Soit $\psi_2(x) \in O^+(x)$ et alors $x \in A_{\psi_2}$ et $\psi_2(x) \notin B_{\psi_1}$.

Ainsi on en déduit que :

$\#(A_{\psi_1 \circ \psi_2}) = \#(A_{\psi_1}) - \#\{y \in B_{\psi_2} | \psi_2(y) \in A_{\psi_1}\} + \#\{x \in A_{\psi_2} | \psi_2(x) \notin B_{\psi_1}\}$ On trouve des ensembles similaires quand $x \in B_{\psi_1 \circ \psi_2}$. et on a :

$\#(B_{\psi_1 \circ \psi_2}) = \#(B_{\psi_1}) - \#\{y \in A_{\psi_2} | \psi_2(y) \in B_{\psi_1}\} + \#\{x \in B_{\psi_2} | \psi_2(x) \notin A_{\psi_1}\}$.

Ainsi on retrouve bien $\text{mod}_x(\psi_1 \circ \psi_2) = \text{mod}_x(\psi_1) + \text{mod}_x(\psi_2)$.

L'application ne dépend pas du choix de x dans son orbite car $\text{mod}_{\phi(x)}(\psi) = \text{mod}_x(\phi^{-1} \circ \psi \circ \phi)$ pour tout $\psi \in [[\phi]]$ et que mod_x est un morphisme.

Soit $(x_n)_n$ qui converge vers x et ψ fixé. On va montrer que $\text{mod}_{x_n}(\psi) = \text{mod}_x(\psi)$ à partir d'un certain rang. Soit m une borne supérieure sur la fonction étagée associée à ψ . Soit (U_i) une partition en clouverts trivialisant ψ . Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $|i| \leq m$ l'élément $\phi^i(x_n)$ est dans la même composante de la partition U_i que x car x_n tend vers x et ainsi $\text{mod}_{x_n}(\psi) = \text{mod}_x(\psi)$. \square

Remarque. Dans notre cas comme on a au moins une orbite infinie car (X, ϕ) est minimal et donc l'application mod_x ne dépend pas de x . On note alors cette application mod . Le théorème suivant est démontré par H. Matui et une preuve est donnée dans [6] mais sera aussi démontré à la fin de cette grande partie.

Théorème 36. *Si (X, ϕ) est un système de Cantor minimal alors $[[\phi]]_0$ est engendré par ses éléments d'ordre fini.*

Remarque. H. Matui dans [2] montre même que la famille des éléments d'ordre 2 est aussi génératrice.

Corollaire 37. *L'application mod est l'unique morphisme de $[[\phi]]$ vers \mathbb{R} envoyant ϕ sur 1.*

Démonstration. Si $\alpha : [[\phi]] \rightarrow \mathbb{R}$ est un morphisme tel que $\alpha(\phi) = 1$ alors pour tout élément ψ d'ordre fini on a pour un certain N , $\alpha(\psi^N) = \alpha(\psi)^N = \alpha(1) = 0$ donc $\psi \in \text{Ker}(\alpha)$. Donc l'application α se factorise sur $[[\phi]]_0 : \alpha' : [[\phi]] / [[\phi]]_0 \rightarrow \mathbb{R}$. Or par mod on sais que le quotient est isomorphe à \mathbb{Z} et donc α' est déterminée par l'image d'un générateur de $[[\phi]] / [[\phi]]_0$ par exemple l'image de ϕ qui est 1. On en déduit que $\alpha = \text{mod}$. \square

L'intérêt de la première définition est que l'on a directement que l'image de mod est dans \mathbb{Z} . La définition donné dans [2] est celle qui suit et en vertu du corollaire 37 l'application qui suit, nommée index , est en fait mod . Soit μ une mesure de probabilité ϕ -invariante sur X , pour tout $\gamma \in [[\phi]]$ on pose

$$I(\gamma) = \int n_\gamma d\mu$$

Où n_γ est l'application continue de X dans \mathbb{Z} associé à γ .

Alors $I(\gamma)$ ne dépend pas du choix de μ et I est un morphisme surjectif de $[[\phi]]$ sur \mathbb{R} .

Comme on souhaite regarde l'abélianisation du groupe plein topologique, on va montrer plus tard que $D([[\phi]]) = D([[\phi]])_0$ et on va chercher à comprendre le quotient $[[\phi]])_0 / D([[\phi]])_0$. Pour faire ça on va avoir besoin d'écrire $[[\phi]])_0$ comme produit de groupes liés à des relations d'équivalences AF (approximately finite).

2.2 Relation d'équivalence étale, Diagramme de Bratteli et groupes pleins AF

Cette partie est un peu la boîte noire de mon stage. Je ne chercherai pas à démontrer les principaux théorèmes de cette partie car ils font appel à la K -théorie ou sont traités par H.Matui dans [2] et s'éloigne du but de mon stage.

2.2.1 Différentes relations d'équivalence

On montrera plus tard qu'un système de Cantor minimal peut se voir comme une relation d'équivalence sur l'espace X associé.

Définition 38. Soit X un espace compact métrisable 0-dimensionnel et soit $\mathcal{R} \subset X \times X$ une relation d'équivalence dénombrable. On peut voir \mathcal{R} comme un groupoïde avec pour tout $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R}$, $(x, y)(y, z) = (x, z)$ et l'inverse définit par $(x, y)^{-1} = (y, x)$.

1. Supposons que \mathcal{R} est équipée d'une topologie \mathcal{T} séparée, localement compact, à base dénombrable telle que le produit est continue et l'inverse est un homéomorphisme (ce qui sera toujours le cas dans la suite). On dit que $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ est une relation d'équivalence étale sur X si l'application $r : \begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \longrightarrow & X \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$ est un homéomorphisme local.
2. Une relation d'équivalence étale $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ sur X est une relation d'équivalence étale compacte (CEER) si \mathcal{R} est compacte.
3. Soit $\{(\mathcal{R}_n, \mathcal{T}_n)\}_{n \geq 1}$ une suite de CEER sur X tels que $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}_{n+1}$ et $\mathcal{R}_n \in \mathcal{T}_{n+1}$. Soit $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ la limite inductive de $\{(\mathcal{R}_n, \mathcal{T}_n)\}_{n \geq 1}$ avec la topologie de la limite inductive \mathcal{T} . On dit que $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ est une relation d'équivalence AF et on notera $(\mathcal{R}, \mathcal{T}) = \lim(\mathcal{R}_n, \mathcal{T}_n)$.

C'est surtout la dernière relation qui nous intéresse car on arrivera à la relier plus tard à des groupes qui sont localement finis.

2.2.2 Diagramme de Bratteli et groupes plein AF

Les diagrammes de Bratteli sont importants car ils permettent de relier plein de notions et peuvent être source d'exemples. On donnera ici rapidement la définition et le lien qu'ils entretiennent avec les relations d'équivalences AF (approximately finite).

Définition 39. On dit que $B = (V, E)$ est un diagramme de Bratteli quand $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ et $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ sont deux union disjointes d'ensembles finis de sommets et d'arêtes avec des applications sources $s : E_n \rightarrow V_{n-1}$ et des applications d'arrivées $r : E_n \rightarrow V_n$ qui sont toutes surjectives. On supposera toujours que V_0 est un singleton $\{v_0\}$.

On note X_B l'espace des chemins infinis de B :

$$X_B = \{(e_n)_n | e_n \in E_n, r(e_n) = s(e_{n+1}) \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Cet espace est muni d'une topologie produit naturel.

On dit que $B = (V, E)$ est simple si pour tout $v \in V_n$ il existe $m > n$ tel que tous les sommets de V_m sont connecté à v .

Remarque. Quand $B = (V, E)$ est un diagramme de Bratteli alors X_B est un espace métrisable compact 0-dimensionnel. Si de plus B est simple alors X_B est un ensemble fini ou un espace de Cantor.

Définition 40. Soit $B = (V, E)$ un diagramme de Bratteli. Deux chemins infinis sont dit queue équivalents s'ils sont égaux à partir d'un certain rang. On note la queue relation d'équivalence par \mathcal{R}_B . On en déduit que \mathcal{R}_B est une union croissante de relations d'équivalence CEER $\mathcal{R}_N = \{((e_n)_n, (f_n)_n) \in X_B \times X_B \mid e_m = f_m \forall m \geq N\}$. Ainsi \mathcal{R}_B avec la topologie de la limite inductive \mathcal{T}_B est une relation d'équivalence AF. On appelle $(\mathcal{R}_B, \mathcal{T}_B)$ la relation d'équivalence associé à B .

En fait on a que toutes les relations d'équivalences AF peuvent être représentées par des diagrammes de Bratteli et le théorème suivant qui utilise dans sa preuve des notions de K -théorie nous l'assure.

Théorème 41. Soit $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ une relation d'équivalence AF sur X . Il existe un diagramme de Bratteli $B = (V, E)$ tel que $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ est isomorphe à la relation d'équivalence $(\mathcal{R}_B, \mathcal{T}_B)$ associé à B . En fait il existe un homéomorphisme ϕ de X dans X_B tel que $\phi \times \phi$ est un homéomorphisme de \mathcal{R} dans \mathcal{R}_B . De plus \mathcal{R} est minimal si et seulement si B est simple.

On va maintenant relier les relations d'équivalences AF avec les groupes pleins localement finis.

Définition 42. Soit X un espace métrique compact 0-dimensionnel et $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ une relation d'équivalence étale sur X . On pose :
 $[\mathcal{R}, \mathcal{T}] = \{\gamma \in \text{Homeo}(X) \mid x \mapsto (x, \gamma(x)) \text{ est bien-définie et continue} \}$
et on l'appelle le groupe plein topologique associé à $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$.

Remarque. On a immédiatement dans le cadre (X, ϕ) système de Cantor minimal que $[\mathcal{R}, \mathcal{T}] = [[\phi]]$ et on a aussi pour tout $x \in X$ que $[\mathcal{R}_x, \mathcal{T}_x] = [[\phi]]_x$.

Le théorème suivant est le théorème principal de cette partie c'est lui qui nous donne la caractérisation des relations d'équivalence AF avec les groupes localement finis. Une preuve est donnée par Matui dans [2].

Théorème 43. Soit X un espace de Cantor et $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ une relation d'équivalence étale. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ est une relation d'équivalence AF.
2. $[\mathcal{R}, \mathcal{T}]$ est un groupe localement fini

De plus on dira maintenant que $[\mathcal{R}, \mathcal{T}]$ est un groupe AF si $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ est une relation d'équivalence AF.

Définition 44. Soit $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ une relation d'équivalence AF. On définit son K^0 -groupe associé par :

$$K^0(\mathcal{R}, \mathcal{T}) = \mathcal{C}(X, \mathbb{Z}) / \{f - f\gamma^{-1} \mid \gamma \in [\mathcal{R}, \mathcal{T}]\}$$

Remarque. De plus en notant $B = (V, E)$ le diagramme de Bratteli associé à la relation d'équivalence AF la K -théorie nous assure que $K^0(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ est isomorphe à $K_0(B)$ et est donc isomorphe à la limite inductive de \mathbb{Z}^{V_m} avec les morphismes entre \mathbb{Z}^{V_m} et $\mathbb{Z}^{V_{m+1}}$ qui sont donnés par les arêtes E_m .

On utilisera plus tard aussi le fait que la limite inductive de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{V_m}$ avec les morphismes induit par les arêtes E_m est isomorphe à $K^0(\mathcal{R}, \mathcal{T}) / {}_2K^0(\mathcal{R}, \mathcal{T})$.

2.2.3 Le cas des systèmes de Cantor minimaux

Dans cette partie on cherche à savoir si on peut relier les systèmes de Cantor minimaux, les diagrammes de Bratteli et les relations AF.

Soit (X, ϕ) un système de Cantor minimal, alors l'ensemble $\mathcal{R} = \{(x, \phi^n(x)) \mid x \in X, n \in \mathbb{Z}\}$ est une relation d'équivalence étale compact. On peut aussi lui associer une topologie en envoyant la topologie produit de $X \times \mathbb{Z}$ par la bijection $(x, n) \mapsto (x, \phi^n(x))$.

Définition 45. Un sous-ensemble $Y \subset X$ est dit errant si $Y \cap \phi^n(Y) = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et on peut considérer la sous-relation d'équivalence \mathcal{R}_Y de \mathcal{R} par :

$$\mathcal{R}_Y = \{(x, \phi^n(x)), (\phi^n(x), x) | x \in X, n \geq 0, \phi^k(x) \notin Y \text{ if } 0 \leq k < n - 1\}$$

Et on note \mathcal{T}_Y la topologie relative à \mathcal{T} .

Le cas qui nous intéresse ici est celui de $Y = \{x\}$. Dans ce cas on note $\mathcal{R}_{\{x\}}$ par \mathcal{R}_x et les classes de cette relation d'équivalence sont les mêmes classes que celles de \mathcal{R} à part qu'on a coupé la classe de x en deux. Une nouvelle classe correspond à l'orbite positive de x et une autre à celle de l'orbite négative.

Théorème 46. Soit (X, ϕ) un système de Cantor minimal et $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ la relation d'équivalence étale associée. Si $Y \subset X$ est un sous-ensemble errant fermé non vide alors la relation d'équivalence $(\mathcal{R}_Y, \mathcal{T}_Y)$ est AF.

Ce théorème utilise lui aussi de la K -théorie dans sa preuve et le fait que l'on peut représenter un homéomorphisme minimal de Cantor par une application sur les chemins infinis d'un diagramme de Bratteli.

Proposition 47. Soit (X, ϕ) un système de Cantor minimal. Pour tout $x \in X$, $(\mathcal{R}_x, \mathcal{T}_x)$ est une relation d'équivalence AF.

Démonstration. Par le théorème précédent il suffit de vérifier que $\{x\}$ est un ensemble errant. Or puisque (X, ϕ) est minimal alors pour tout $x \in X$, x possède une orbite infini et donc $\{x\}$ est errant. \square

2.3 La signature

Dans cette partie on s'attaque à la fabrication d'un isomorphisme pour identifier le noyau de mod . Cette étude se fait d'abord en traitant le cas AF avant de généraliser le résultat.

2.3.1 La signature pour le cas AF

On veut créer une application signature un peu comme pour les permutations et on va identifier notre groupe plein AF avec un espace constitué de permutations. Ensuite on va regarder les sous-groupes qui seront identifiés à des groupes alternés et on fera des quotients pour retrouver des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui composeront l'image de notre application signature.

Lemme 48. *Si $B = (V, E)$ est un diagramme de Bratteli et $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ est la relation d'équivalence AF associée. Le groupe plein AF, $G = [\mathcal{R}, \mathcal{T}]$, peut être écrit comme une union croissante de sous-groupes G_m qui sont isomorphes à une somme directe de groupes symétriques.*

Démonstration.

On rappelle que l'on a $(\mathcal{R}, \mathcal{T}) = \lim(\mathcal{R}_n, \mathcal{T}_n)$ où \mathcal{R}_n est la relation jusqu'à la hauteur n : $\mathcal{R}_n = \{(x, y) \in X_B \times X_B \mid x_k = y_k \ \forall k \geq n\}$ et où $(\mathcal{R}_n, \mathcal{T}_n)$ est CEER.

Soit $\gamma \in G$ il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in X$, $(x, \gamma(x)) \in \mathcal{R}_N$ car X est compact. Ainsi les chemins infinis x et $\gamma(x)$ sont les mêmes à partir du niveau $N + 1$. Comme γ est continue alors il existe un rang $M > N$ tel que les N premières arêtes de $\gamma(x)$ ne dépendent que des M premières arêtes de x . Ainsi si x et y coïncident sur les M premières arêtes alors les N premières arêtes de $\gamma(x)$ et $\gamma(y)$ coïncident aussi. Et comme γ est laissé inchangé les arêtes au delà du rang N alors en fait $\gamma(x)$ et $\gamma(y)$ coïncident sur les M premières arêtes. On en déduit que γ induit une permutation sur l'ensemble des chemins du sommet $v_0 \in V_0$ à un sommet $v \in V_M$ et ce pour tout $v \in V_m$. On obtient alors un sous-groupe G_m de G qui est isomorphe à $\bigoplus_{v \in V_m} S_{h(v)}$ où

$h(v)$ est le nombre de chemins de v_0 à v .

De plus on a que $G_m \subset G_{m+1}$ car les applications sources et d'arrivées sont surjectives donc pour tout $v \in V_m$ il existe au moins une arête qui relie v à un sommet $v' \in V_{m+1}$ et ainsi $S_{h(v')}$ contient au moins une copie de $S_{h(v)}$. Comme tout élément γ de G est dans un certain G_m on a immédiatement que G est égal à l'union croissante des G_m , ce qui conclut. \square

Comme tous les groupes symétriques $S_{h(v)}$ possèdent un sous-groupe alterné $A_{h(v)}$, on peut alors trouver pour tout $m \in \mathbb{Z}$ un sous-groupe $H_m \subset G_m$ qui soit isomorphe à $\bigoplus_{v \in V_m} A_{h(v)}$. On a alors aussi $H_m \subset H_{m+1}$.

Proposition 49. *Avec les notations précédentes, si le diagramme de Bratteli B est simple alors il existe un certain rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout sommet $v \in V_n$ on a $h(v) > 1$ et il existe même une suite d'indice l_k telle que pour tout $v \in V_{l_k}$ on a $h(v) \geq 2^k$.*

Démonstration.

Soit $\gamma \in G$ non trivial. Alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma \in G_m$. Soit $v \in V_m$ tel que la composante de γ dans $S_{h(v)}$ soit non trivial. Alors $h(v) \geq 2$. Comme B est simple il existe $N \geq m$ tel que tous les sommets $w \in V_N$ soit reliés à v . Ainsi $h(w) \geq 2$ pour tout $w \in V_N$.

Pour la deuxième partie de la proposition il faut regarder au cran d'après. Si on répète une deuxième fois ce qu'on vient de dire on trouve $N_2 > N$ tel que pour tous les sommets dans V_{N_2} on a que le nombre de chemin existant est plus grand que $h(v) \times \#V_N$. Donc si V_k possède au moins deux éléments à chaque étape, on obtient un nombre plus grand que 2^k à l'étape k . Dans le cas où le nombre de sommet dans

V_k est 1 sauf en un nombre fini d'endroit, alors il y aurait un nombre fini d'éléments dans X_B ce qui est absurde car on travaille dans un espace X infini, ainsi il existe une infinité de V_k qui possèdent au moins 2 éléments, ce qui conclut. \square

Proposition 50. *Avec les notations ci dessus, $D(G) = \bigcup H_m$ et $D(G)$ est simple si et seulement si le diagramme B l'est c'est-à-dire si la relation \mathcal{R} est minimale.*

Démonstration. Comme $H_m \subset H_{m+1}$ et qu'à partir d'un certain rang M on a pour tout $m \geq M$ et pour tout sommet $v \in V_m$ que $h(v) \geq 5$ alors $A_{h(v)} = D(S_{h(v)})$. Ainsi $D(G) = \bigcup_m \bigoplus_{v \in V_m} D(S_{h(v)}) = \bigcup_{m \geq M} \bigoplus_{v \in V_m} D(S_{h(v)}) = \bigcup_{m \geq M} \bigoplus_{v \in V_m} A_{h(v)} = \bigcup H_m$.

Supposons que le diagramme de Bratteli B est simple. Soit N un sous-groupe distingué de $D(G)$ et $\gamma \in N$ un élément non trivial. Par définition de $D(G)$ on a qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma \in H_n$ et par définition de H_n on en déduit qu'il existe $v \in V_n$ tel que la composante de γ dans $A_{h(v)}$ soit non trivial. Comme B est simple alors par la proposition précédente il existe une suite d'indices tous plus grand que M , $(l_k)_k$, qui tend vers l'infini tel que l'ensemble des sommets $w \in V_{l_k}$ soit connecté par un chemin à v . On a alors que pour tout tel w la composante de $\gamma \in A_{h(w)}$ est non nulle. Or Comme $l_k \geq M$ on a que $h(w) \geq 5$ et donc que $A_{h(w)}$ est simple. Or $N \cap A_{h(w)}$ est un sous-groupe distingué de $A_{h(w)}$ et donc est égal à $A_{h(w)}$. Ainsi $\bigoplus_{w \in V_{l_k}} A_{h(w)} \subset N$.

Or ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc $H_{l_k} \subset N$. Or on a l'inclusion croissante des H_i et l_k tend vers l'infini d'où $\cup H_i \subset N$. Donc $N = D(G)$, ce qui conclut.

Réciproquement si B n'est pas simple alors on peut trouver $m \in \mathbb{N}$ et un sommet $v \in V_m$ tel que pour tout $k \geq m$ l'ensemble $W_k = \{w \in V_k \mid w \text{ est relié à } v\}$ est un sous-ensemble strict de V_k . En posant pour tout $k \geq m$, $N_k = \bigoplus_{w \in W_k} A_{h(w)} \subset H_k$ et

$N = \bigcup_{k \geq m} N_k$, on a que N est un sous-groupe distingué propre non trivial de H . \square

De cette preuve on tire que $G/D(G)$ est isomorphe à la limite inductive de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{V_m}$ et est donc isomorphe à $K^0(\mathcal{R}, \mathcal{T})/2K^0(\mathcal{R}, \mathcal{T})$.

On a maintenant tous ce qu'il faut pour définir le morphisme de signature dans le cas AF.

Définition 51. L'application signature sgn est définie comme la composition du morphisme quotient $G \longrightarrow G/D(G)$ et de l'isomorphisme avec $K^0(\mathcal{R}, \mathcal{T})/2K^0(\mathcal{R}, \mathcal{T})$.

Puisque sgn est un morphisme et que l'image de sgn vit dans un espace qui ressemble a des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on va montrer que la valeur de $sgn(\gamma)$ pour tout $\gamma \in G$ est entièrement déterminée par le sous-ensemble $U = \{x \in X \mid \exists k \in 2\mathbb{N}, \gamma^k(x) = x\}$. Pour cela on note $f(x)$ le plus petit entier tel que $\gamma^{f(x)}(x) = x$. On a f qui est une fonction continue et bien définie. Pour $n \in \mathbb{N}$ si $f^{-1}(n) \neq \emptyset$ on peut trouver $W_n \subset f^{-1}(n)$ un clouvert tel que $W_n, \gamma(W_n), \dots, \gamma^{n-1}(W_n)$ forment une partition de $f^{-1}(n)$. Comme $\gamma \in G$ et que G est localement fini alors γ est d'ordre fini, ainsi il n'y a qu'un nombre fini de $n \in \mathbb{N}$ tels que $f^{-1}(n)$ soit non vide.

Proposition 52. *En posant $g(x) = \sum_{n \in 2\mathbb{N}} 1_{V_n}(x)$ on a $sgn(\gamma) = [g] + 2K^0(\mathcal{R}, \mathcal{T})$. La somme est finie car seul un nombre fini de W_n est non vide.*

Démonstration.

On pose $U = \bigcup_{n \in 2\mathbb{N}} W_n$ et pour $z \in X$ on pose

$$\gamma'(z) = \begin{cases} \gamma(z) & z \in U \\ \gamma^{-1}, & z \in \gamma(U) \\ z, & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme γ et γ^{-1} sont dans G et sont donc injectifs alors γ' est injectif car $U \cap \gamma(U) = \emptyset$. γ' est surjective car si $z \in U$ alors $\gamma'(\gamma(z)) = z$, si $z \in \gamma(U)$ alors $\gamma'(\gamma^{-1}(z)) = z$ et sinon γ' est l'identité. De plus γ' est continue car γ l'est sur U , γ^{-1} l'est sur $\gamma(U)$ et surtout car $X = U \sqcup \gamma(U) \sqcup X \setminus (U \sqcup \gamma(U))$ est une partition de X en ouvert fermé. On remarque aussi que $\gamma'^2 = id$ est donc que $\gamma'^{-1} = \gamma'$. Donc γ' est bien un homéomorphisme de X et est donc dans G .

On montre maintenant que $\gamma^{-1}\gamma'$ est dans $D(G)$. Pour se faire on va montrer que l'on peut l'écrire comme un carré. Soit $x \in X$, si $x \in U$ alors $\gamma^{-1}\gamma'(x) = x$. Si $x \in \gamma(U)$, soit $n \in 2\mathbb{N}$ tel que $\gamma^{-1}(x) \in W_n$ alors $\gamma^{-1}\gamma'(x) = \gamma^{-2}(x) \in \gamma^{-1}(W_n) = \gamma^{n-1}(W_n)$. Comme $U \cap \gamma^k(W_n) = \emptyset$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ alors $(\gamma^{-1}\gamma')^2(x) = \gamma^{-3}(x) \in \gamma^{n-2}(W_n)$. Ainsi par récurrence immédiate on obtient que l'ordre sous $\gamma^{-1}\gamma'$ de x est $n-1$ et est donc impair. Si $x \in X \setminus (U \sqcup \gamma(U))$ alors $\gamma^{-1}\gamma'(x) = \gamma^{-1}(x)$ donc si x est d'ordre pair sous γ un des itérés de x sous $\gamma^{-1}\gamma'$ sera dans $\gamma(U)$ et on fera ainsi un saut. C'est-à-dire que l'orbite de x sous $\gamma^{-1}\gamma'$ sera l'orbite de x sous γ avec un élément en moins. Donc x sera d'ordre impair. Si x est d'ordre impair sous γ alors l'orbite de x sous $\gamma^{-1}\gamma'$ est la même que sous γ donc x est d'ordre impair sous $\gamma^{-1}\gamma'$ (le cas d'ordre infini n'apparaît pas car γ est d'ordre fini).

Ainsi $\gamma^{-1}\gamma'$ est d'ordre impair. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $(\gamma^{-1}\gamma')^{2N+1} = id$. D'où $\gamma^{-1}\gamma' = ((\gamma^{-1}\gamma')^{-N})^2$ c'est donc bien un carré! On en déduit comme sgn est un morphisme que $sgn(\gamma^{-1}\gamma') = 2 * sgn((\gamma^{-1}\gamma')^{-N}) = 0$, ainsi $\gamma^{-1}\gamma' \in D(G)$.

On obtient alors que $sgn(\gamma') = sgn(\gamma\gamma^{-1}\gamma') = sgn(\gamma)$. Il reste à montrer que $sgn(\gamma') = [g] + 2K^0(\mathcal{R}, \mathcal{T})$. Soit m l'entier tel que $\gamma' \in G_m \simeq \bigoplus_{v \in V_m} S_{h(v)}$. On re-

marque alors que U est égal à l'ensemble des chemins infinis tel que le morceau entre v_0 et $v \in V_m$ soit modifié par γ . Si p est un chemin entre v_0 et v , on note $U(p)$ l'ensemble des chemins qui coïncident sur p . En notant P_v l'ensemble des chemins p entre v_0 et v qui sont modifiés par γ on obtient $U = \bigcup_{v \in V_m} \bigcup_{p \in P_v} U(p)$. Comme γ' est d'ordre

2 alors chacune de ses composantes sur $S_{h(v)}$ est un produit de $\#P_v$ transpositions. Il en résulte que $sgn(\gamma') = \sum_{v \in V_m} \sum_{p \in P_v} [1_{U(p)}] + 2K^0(\mathcal{R}, \mathcal{T}) = [g] + 2K^0(\mathcal{R}, \mathcal{T})$. \square

Corollaire 53. *Si $\gamma \in [[\phi]]_x \cap [[\phi]]_y$ alors la signature est bien définie*

Démonstration.

En effet il suffit de remarquer que l'ensemble $\{x, y\}$ est un ensemble errant et donc que $[[\phi]]_x \cap [[\phi]]_y = [\mathcal{R}_{\{x, y\}}, \mathcal{T}_{\{x, y\}}]$ est un groupe AF et que la valeur de la signature ne dépend pas du x choisi. \square

2.3.2 La signature pour $[[\phi]]_0$

Soit (X, ϕ) un système minimal de Cantor. Toujours dans l'objectif de comprendre l'abélianisé d'un groupe plein topologique, on essaye de comprendre le groupe $[[\phi]]_0$ en utilisant la signature. Comme on ne comprend pour l'instant que les groupes AF on va essayer de s'y ramener c'est le but du lemme qui suit.

Lemme 54. *Quand x et y possèdent des orbites distinctes dans X alors $[[\phi]]_0 = [[\phi]]_x [[\phi]]_y$. C'est-à-dire que pour tout $\gamma \in [[\phi]]_0$ il existe $\gamma_1 \in [[\phi]]_x$ et $\gamma_2 \in [[\phi]]_y$ tels que $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$.*

Remarque. La preuve de ce lemme est très importante pour la suite car cela donne une construction explicite de la décomposition d'un élément $\gamma \in [[\phi]]_0$. Il se trouve que l'on sera amené à réutiliser cette décomposition et à changer un peu la nature des voisinages considérés afin qu'ils satisfassent des conditions supplémentaires. Cela ne changera en rien la preuve de ce lemme.

Démonstration. On rappelle que $O^+(x)$ est l'orbite positive de x et $O^-(x)$ son orbite négative et que $x \in O^-(x)$. On pose $A = \{n \geq 1 \mid \gamma(\phi^n(x)) \in O^-(x)\}$ et $B = \{n \geq 1 \mid \gamma(\phi^{1-n}(x)) \in O^+(x)\}$. Ces ensembles correspondent aux A_γ et B_γ dans 35. Comme

$\gamma \in [[\phi]]_0$ on a bien évidemment $\#A = \#B$. On note $l = \max\{n \mid n \in A \cup B\}$. On choisit un petit voisinage clouvert U de x tel que $\phi^{-l}(U), \phi^{-l+1}(U), \dots, \phi^l(U)$ sont deux à deux disjoints et tel que $V = \bigcup_{n \in B} \phi^{1-n}(U) \cup \bigcup_{n \in A} \phi^n(U)$ ne contient pas $y, \phi(y), \dots, \phi^{2l-1}(y)$. L'idée est de prendre une application qui va "échanger" les ensembles qui correspondent à des indices dans A avec ceux qui correspondent à des indices dans B . Cette application sera dans $[[\phi]]_y$ car on a pris soin d'éviter l'orbite de y assez longtemps. Et de plus quand on composera cette application par γ les éléments de l'orbite de x qui auront été échangé reviendront dans le bon côté de l'orbite. Soit $\pi : A \rightarrow B$ une bijection. On définit γ_2 par :

$$\gamma_2(z) = \begin{cases} \phi^{1-\pi(n)-n}(z) & z \in \phi^n(U), n \in A \\ \phi^{n-1+\pi^{-1}(n)}(z) & z \in \phi^{1-n}(U), n \in B \\ z & z \in X \setminus V \end{cases}$$

On a immédiatement que γ_2 est d'ordre 2 et est continue donc elle est bicontinue. On remarque plus précisément qu'elle envoie pour $n \in A$ l'ensemble $\phi^n(U)$ sur l'ensemble associé à $\pi(n) : \phi^{1-\pi(n)}(U)$ de manière bijective. Donc γ_2 est bijective et est donc un homéomorphisme.

On montre tout d'abord que γ_2 vit dans $[[\phi]]_y$. Soit $k \geq 0$ un entier, si $k \in [1, l]$ on a $\gamma_2(\phi^k(y)) = \phi^k(y)$ car $\phi^k(y) \in X \setminus V$ par hypothèse. De plus si $k \geq l$ alors $\phi^k(y)$ est dans l'orbite positive de y par définition de l . Donc γ_2 stabilise l'orbite positive de y et il en est de même pour l'orbite négative. Ainsi $\gamma_2 \in [[\phi]]_y$.

La deuxième chose que l'on vérifie est que $\gamma\gamma_2 \in [[\phi]]_x$. Soit $k \geq 0$ un entier, si $k \in A$ alors $\phi^k(x) \in \phi^k(U)$ et ainsi $\gamma_2(\phi^k(x)) = \phi^{1-\pi(k)}(x)$. Or $\pi(k) \in B$ et donc par définition de B on obtient que $\gamma(\phi^{1-\pi(k)}(x))$ est dans l'orbite positive de x . Si $k \notin A$ alors $\gamma_2(\phi^k(x)) = \phi^k(x)$ et par définition de A on en déduit que $\gamma(\phi^k(x))$ est encore dans l'orbite positive de x . Donc $\gamma\gamma_2$ stabilise l'orbite positive de x et on obtient de même qu'il stabilise l'orbite négative (en regardant les k dans B cette fois). Donc $\gamma\gamma_2 \in [[\phi]]_x$. Ce qui conclut. \square

On énonce maintenant le lemme qui définit la signature pour des éléments de $[[\phi]]_0$ comme la somme des signatures des γ_i .

Lemme 55. *Soit x, y qui vivent dans deux différentes orbites. Pour $\gamma \in [[\phi]]_0$ on prend $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ une décomposition comme dans le lemme précédent avec $\gamma_1 \in [[\phi]]_x$ et $\gamma_2 \in [[\phi]]_y$. On pose $s = \text{sgn}(\gamma_1) + \text{sgn}(\gamma_2) \in K^0(X, \phi) / {}_2K^0(X, \phi)$. Alors s ne dépend pas du choix de γ_1 et de γ_2 . Et même s ne dépend pas du choix des x et y vivant dans les orbites distinctes.*

Démonstration. Soit ν_1, ν_2 une autre décomposition, alors $\gamma_1\gamma_2 = \nu_1\nu_2$. D'où $\nu_1^{-1}\gamma_1 = \nu_2\gamma_2^{-1} \in [[\phi]]_x \cap [[\phi]]_y$. Or $[[\phi]]_x \cap [[\phi]]_y = [\mathcal{R}_{\{x,y\}}, \mathcal{T}_{\{x,y\}}]$ est un groupe AF par le théorème 46 car l'ensemble $\{x, y\}$ est errant. On a donc que la signature est un morphisme et ainsi $\text{sgn}(\nu_1^{-1}\gamma_1) = \text{sgn}(\gamma_1) - \text{sgn}(\nu_1) = \text{sgn}(\nu_2\gamma_2^{-1}) = \text{sgn}(\nu_2) - \text{sgn}(\gamma_2)$. D'où $\text{sgn}(\gamma_1) + \text{sgn}(\gamma_2) = \text{sgn}(\nu_1) + \text{sgn}(\nu_2)$ et ainsi la valeur s ne dépend pas de la décomposition.

Soit x, y, z vivant dans différentes orbites. Dans la preuve du lemme 54 on peut construire un $\gamma_2 \in [[\phi]]_y$. Quitte à réduire le clouvert U on peut supposer en plus que γ_2 est l'identité sur $z, \phi(z), \dots, \phi^{l-1}(z)$ en faisant en sorte que l'ensemble V évite ces éléments, et ainsi $\gamma_2 \in [[\phi]]_y \cap [[\phi]]_z$. Ainsi on a la même valeur pour la signature en considérant la paire de points (x, y) ou (x, z) car le même γ_2 convient dans la construction de la décomposition. Par symétrie on obtient la même valeur si c'est x que l'on change. \square

Définition 56. On peut alors définir la signature d'un élément $\gamma \in [[\phi]]_0$ comme la valeur $s \in K^0(X, \phi) / {}_2K^0(X, \phi)$ définie précédemment. On a alors l'application

$sgn : [[\phi]]_0 \longrightarrow K^0(X, \phi) / {}_2K^0(X, \phi)$ qui est bien définie et que l'on appelle encore application signature.

On a en fait le résultat suivant :

Proposition 57. *L'application signature précédemment définie est un morphisme de groupe.*

Démonstration. Soit $\gamma, \nu \in [[\phi]]_0$ on veut montrer que $sgn(\gamma\nu) = sgn(\gamma) + sgn(\nu)$. Soit $x, y \in X$ qui sont dans deux orbites distinctes et soit γ_1, γ_2 une décomposition de γ et ν_1, ν_2 une décomposition de ν . On a $sgn(\gamma_1\gamma_2\nu_1\nu_2) = sgn(\gamma_1\nu_1\nu_1^{-1}\gamma_2\nu_1\nu_2)$ et on remarque qu'on a une nouvelle décomposition en effet $\gamma_1\nu_1 \in [[\phi]]_x$ on veut montrer que $\nu_1^{-1}\gamma_2\nu_1\nu_2 \in [[\phi]]_y$.

On pose $m = \max \{n \in \mathbb{N} \mid \nu_1^{-1}(\phi^n(y)) \in O^-(y) \text{ ou } \nu_1^{-1}(\phi^{1-n}(y)) \in O^+(y)\}$. Dans la construction de γ_2 on peut réduire le clouvert U afin d'avoir $\phi^k(y) \notin V$ pour tout $k \in \llbracket 1 - m, m \rrbracket$. Soit $n \geq 1$ un entier et $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $\phi^n(y) = \nu_1^{-1}(\phi^\lambda(y))$ alors $\nu_1^{-1}\gamma_2\nu_1(\phi^n(y)) = \nu_1^{-1}\gamma_2(\phi^\lambda(y))$.

Si $\lambda \in \llbracket 1 - m, m \rrbracket$ alors $\phi^\lambda(y) \notin V$. D'où $\nu_1^{-1}\gamma_2\nu_1\phi^n(y) = \nu_1^{-1}\phi^\lambda(y) = \phi^n(y)$.

Sinon comme $n \geq 1$ alors $\lambda \geq 1$ car par définition de m on déduit que n et λ sont de même signe. Par la précaution prise sur U pour éviter les $\phi^k(y)$ avec $k \in \llbracket 1 - m, m \rrbracket$ alors $\gamma_2(\phi^\lambda(y)) = \phi^t(y)$ pour un $t > m$ et donc $\nu_1^{-1}\gamma_2\nu_1(\phi^n(y)) \in O^+(y)$. Ainsi $\nu_1^{-1}\gamma_2\nu_1$ préserve l'orbite positive de y , il en est de même pour l'orbite négative. D'où $\nu_1^{-1}\gamma_2\nu_1 \in [[\phi]]_y$.

On en déduit que $\nu_1^{-1}\gamma_2\nu_1\nu_2 \in [[\phi]]_y$! Il faut encore remarquer que $\gamma_2^{-1}\nu_1^{-1}\gamma_2\nu_1 = \nu_1 \circ \nu_1^{-1}\gamma_2^{-1}\nu_1 \circ \nu_1^{-1} \circ \nu_1^{-1}\gamma_2\nu_1$, chacun des termes étant dans $[[\phi]]_y$ on en déduit que $\gamma_2^{-1}\nu_1^{-1}\gamma_2\nu_1 \in D([[\phi]]_y)$ et ainsi sa signature est nulle. D'où $sgn(\nu_1^{-1}\gamma_2\nu_1) = sgn(\gamma_2\gamma_2^{-1}\nu_1^{-1}\gamma_2\nu_1) = sgn(\gamma_2)$.

On conclut que $sgn(\gamma\nu) = sgn(\gamma_1) + sgn(\nu_1) + sgn(\nu_1^{-1}\gamma_2\nu_1) + sgn(\nu_2) = sgn(\gamma_1) + sgn(\nu_1) + sgn(\gamma_2) + sgn(\nu_2) = sgn(\gamma) + sgn(\nu)$. \square

Ainsi puisque la signature est un morphisme on en déduit que $D([[\phi]]_0)$ est dans le noyau de la signature et donc on obtient un morphisme entre l'abélianisé $[[\phi]]_0 / D([[\phi]]_0)$ et $K^0(X, \phi) / {}_2K^0(X, \phi)$. La partie qui suit fait l'étude de ce morphisme.

2.4 L'abélianisé de $[[\phi]]_0$

2.4.1 Lien avec l'abélianisé de $[[\phi]]$

On rappelle que l'on souhaite étudier, pour (X, ϕ) un système de Cantor minimal, l'abélianisé du groupe plein topologique $[[\phi]]$. Pour l'instant on a surtout travaillé sur le groupe $[[\phi]]_0$ et on a obtenu le morphisme signature. Par l'application mod on a démontré que $[[\phi]]$ est isomorphe à $[[\phi]]_0 \times \mathbb{Z}$. Afin de comprendre $[[\phi]]/D([[\phi]])$ on va le voir comme le produit $[[\phi]]_0/D([[\phi]]) \times \mathbb{Z}$. On montre maintenant une proposition et un lemme qui vont nous permettre de relier le groupe dérivé $D([[\phi]])$ avec le groupe dérivé $D([[\phi]])_0$.

Proposition 58. *le groupe $D([[\phi]])_0$ est distingué dans $[[\phi]]$.*

Démonstration.

Soit $\gamma \in D([[\phi]])_0$ soit I un ensemble fini et on note alors $\gamma = \prod_{i \in I} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ avec $a_i, b_i \in [[\phi]]$. Soit $\psi \in [[\phi]]$. On a alors pour tout i que $\psi a_i \psi^{-1} \in [[\phi]]$ car mod est un morphisme de $[[\phi]]$ vers \mathbb{Z} et donc $\text{mod}(\psi a_i \psi^{-1}) = \text{mod}(a_i) + \text{mod}(\psi) - \text{mod}(\psi) = 0$. Ainsi $\psi \gamma \psi^{-1} = \prod_{i \in I} \psi a_i \psi^{-1} \psi b_i \psi^{-1} \psi a_i^{-1} \psi^{-1} \psi b_i^{-1} \psi^{-1}$ est bien un élément de $D([[\phi]])_0$, ce qui conclut. \square

Lemme 59. *On a l'égalité $D([[\phi]]) = D([[\phi]])_0$.*

Démonstration.

L'inclusion de droite à gauche est évidente. Faisons l'inclusion de gauche à droite. Pour le faire on va montrer que le quotient $[[\phi]]/D([[\phi]])_0$ est abélien, et par définition du groupe dérivé cela conclura. Afin d'obtenir une telle propriété on va construire une suite exacte. On a

$$D([[\phi]])_0 \xrightarrow{id} [[\phi]])_0 \xrightarrow{id} [[\phi]]) \xrightarrow{proj} [[\phi]]/[[\phi]])_0$$

On en déduit la suite suivante :

$$1 \hookrightarrow [[\phi]])_0/D([[\phi]])_0 \xrightarrow{id} [[\phi]]/D([[\phi]])_0 \xrightarrow{proj'} [[\phi]]/[[\phi]])_0 \simeq \mathbb{Z} \rightarrow 1$$

Les injections proviennent de la suite précédente et la surjection $proj'$ est bien une surjection car elle provient de la projection de la suite précédente et de l'inclusion de $D([[\phi]])_0$ dans $[[\phi]])_0$. Pour obtenir une suite exacte il reste à montrer que $\ker(proj') = [[\phi]])_0/D([[\phi]])_0$. Or le noyau de $proj$ est $[[\phi]])_0$ et $D([[\phi]])_0$ est distingué dans $[[\phi]])_0$ on en déduit que le noyau de ν est bien $[[\phi]])_0/D([[\phi]])_0$. Ainsi on a bien une suite exacte.

On en déduit alors par un résultat usuel sur les suites exactes que $[[\phi]]/D([[\phi]])_0$ est isomorphe au produit semi-direct $[[\phi]])_0/D([[\phi]])_0 \rtimes \mathbb{Z}$. Or les deux groupes qui apparaissent sont abéliens on en déduit donc que c'est un produit direct et donc que $[[\phi]]/D([[\phi]])_0$ est abélien! Ainsi par définition du groupe dérivé on en déduit que $D([[\phi]]) \subset D([[\phi]])_0$, ce qui conclut. \square

2.4.2 Identification en tant que 2-groupe abélien élémentaire

On rappelle que le morphisme signature qui va de $[[\phi]])_0$ vers $K^0(X, \phi)/2K^0(X, \phi)$ est surjectif et que le groupe d'arrivée est un 2-groupe abélien élémentaire. Ainsi afin d'identifier l'abélianisé de $[[\phi]])_0$ en tant que 2-groupe abélien élémentaire il suffit de montrer que le noyau du morphisme signature est le groupe dérivé de $[[\phi]])$. Pour cela

on a besoin de pouvoir "couper" des clouverts en deux. Je ne m'étend pas sur le sujet et je donne directement sans démonstration le lemme suivant qui est du à E.Glasner et B.Weiss [1] :

Lemme 60. *Soit $x \in X$ et U un voisinage clouvert de x . Soit $V \subset U$ tel que pour toute mesure μ qui est ϕ -invariante on a $2\mu(V) < \mu(U)$. Alors il existe $W \subset U \setminus V$ tel que $\mu(V) = \mu(W)$ pour toute mesure ϕ -invariante μ . Et alors $[1_V] = [1_W]$*

Remarque. On remarque que si U est un clouvert et que l'on choisit V à l'intérieur tel que V satisfait les conditions du lemme ce qui est possible car dans notre cas comme ϕ n'admet pas d'orbite finie alors tout élément admet des voisinages clouvets dont le supremum des mesures ϕ -invariantes soit aussi petit que l'on veut. Alors en considérant $V \cup W$ (où W est donné par la conclusion du lemme), on obtient que $[1_{V \cup W}] = [1_V] + [1_W] = 2[1_V] = 0 \in K^0(X, \phi) / 2K^0(X, \phi)$.

Théorème 61. *Soit (X, ϕ) un système de Cantor minimal. Alors le noyau de l'application signature est égale au commutateur $D([\phi]_0)$ et ainsi sgn établit un isomorphisme entre $[\phi]_0 / D([\phi]_0)$ et $K^0(X, \phi) / 2K^0(X, \phi)$*

Démonstration. L'inclusion $D([\phi]_0) \subset Ker(sgn)$ est évidente. On montre l'autre inclusion. Soit $\gamma \in [\phi]_0$ tel que $sgn(\gamma) = 0$. On choisit x, y dans deux orbites distinctes et par le lemme 54 on prend une décomposition $\gamma_1 \gamma_2$ de γ . Seulement lors de la construction de γ_2 en particulier lors du choix de du clouvert U par la remarque précédente on peut le remplacer par $U' \subset U$ qui vérifie $[1_{U'}] = 0$. Ainsi par la proposition 52 $sgn(\gamma_2) = [1_{U'}] = 0$. Comme la signature est un morphisme on en déduit que $sgn(\gamma_1) = 0$. Ainsi $\gamma_1 \in D([\phi]_x) \subset D([\phi]_0)$ et $\gamma_2 \in D([\phi]_y) \subset D([\phi]_0)$ d'où $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \in D([\phi]_0)$, ce qui conclut. \square

3 Conclusion

La compréhension d'un groupe n'est pas toujours aisée et comprendre son abélianisé est un moyen d'obtenir des informations sur le groupe de départ. On a tout d'abord travaillé sur un exemple concret, où les exemples sont très visuels, sur le groupe des IET. Dans ce cas on a réussi, grâce à P.Arnoux dans [5], à trouver un isomorphisme entre l'abélianisé et une algèbre extérieure. Ensuite on a cherché à comprendre une famille d'homéomorphismes : les homéomorphismes minimaux. Pour se faire on a cherché à être le plus général possible en suivant les pas de H.Matui dans [2]. Cela nous a permis d'aboutir à la compréhension de l'abélianisé de groupe plein topologique en tant que produit de \mathbb{Z} par un 2-groupe élémentaire.

Les questions suivantes reviennent alors sur les IET et en particulier lorsqu'on choisit un sous-groupe des IET. En effet on obtient alors un morphisme entre les deux abélianisés et on cherche à comprendre ce morphisme.

4 Groupes de transformations d'échanges d'intervalle cadre plus général

On s'intéresse maintenant aux sous-groupes du groupe des transformation d'échanges d'intervalles IET. Pour cela on fixera deux objets : un sous-groupe de translations autorisées Λ et un ensemble de singularités autorisées W . On voit Λ comme un sous-groupe de \mathbb{R} afin d'essayer de retrouver des résultats semblables que dans le cas de IET, en particulier on avait trouvé un isomorphisme entre l'abélianisé de IET et $\bigwedge_{\mathbb{Q}}^2 \mathbb{R}$. Il sera implicitement supposé qu'appliquer un élément $\lambda \in \Lambda$ à un élément $u \in [0, 1[$ renverra l'élément $\{u + \lambda\}$ qui est la partie fractionnaire de $u + \lambda$.

Définition 62. Soit $(\Lambda, +)$ un sous-groupe de \mathbb{R} qui contient \mathbb{Z} . Soit W un sous-ensemble de $[0, 1[$ qui contient 0 et tel que $\Lambda(W) \subset W$. On définit le groupe $\text{IET}(\Lambda, W)$ comme l'ensemble $\{f \in \text{IET} \mid f(x) = x + \lambda_x, \lambda_x \in \Lambda \text{ et } x + \lambda_x \in [0, 1[\}$. De plus si $W = \Lambda \cap [0, 1[$ on notera juste $\text{IET}(\Lambda)$ le groupe $\text{IET}(\Lambda, W)$.

Remarque. $\text{IET}(\Lambda, W)$ est bien un groupe car si $f, g \in \text{IET}(\Lambda, W)$ alors il existe λ et μ tels que $f \circ g(x) = x + \lambda + \mu [1] = x + \lambda + \mu + k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Or Λ contient \mathbb{Z} d'où $\lambda + \mu + k \in \Lambda$.

Le morphisme d'abélianisation de IET existe aussi pour $\text{IET}(\Lambda, W)$ et avec l'isomorphisme trouvé pour l'abélianisé de IET on a un morphisme :

$$\Phi : \text{IET}(\Lambda, W) /_{D(\text{IET}(\Lambda, W))} \longrightarrow \text{IET} /_{D(\text{IET})}$$

On aimerai donc comprendre ce morphisme, son image et son noyau, afin de comprendre l'abélianisé de $\text{IET}(\Lambda, W)$. Pour cela on va d'abord traiter un cas très proche du cas IET global et où on va obtenir l'injectivité de notre morphisme d'abélianisation de manière similaire. Puis on va essayer de trouver des cas où le morphisme d'abélianisation n'est pas injectif.

4.1 Le cas 2-divisible

Dans toute la suite on fixe $(\Lambda, +)$ un sous-groupe de \mathbb{R} qui contient \mathbb{Z} et W un sous-ensemble de $[0, 1[$ qui contient 0, tels que $\Lambda(W) \subset W$.

4.1.1 Définitions

Au cours de la preuve de l'isomorphisme entre $\text{IET} /_{D(\text{IET})}$ et $\bigwedge_{\mathbb{Q}}^2 \mathbb{R}$, on s'est aperçu que le fait d'être dans l'abélianisé n'a servi que dans la preuve de $R_{b,2b} \in D(\text{IET})$. On explicite ici une notion qui nous donnera cette propriété et dans ce cas on montrera de manière similaire que le morphisme Φ est injectif.

Définition 63. On dit que (Λ, W) , ou $\text{IET}(\Lambda, W)$, est 2-divisible si et seulement si pour tous $a, b \in W$ tels que $a \leq b$ on a $\frac{a+b}{2} \in W$ et $\frac{b-a}{2} \in \Lambda$.

Remarque. On voulait "couper" en deux un intervalle pour pouvoir dire que $R_{b,2b}$ soit dans le groupe dérivé. On vient de traduire ce que signifie ce "couper". En effet on a introduit un nouveau point singulier qui est le milieu et pour obtenir la forme d'un commutateur on avait utilisé une rotation d'angle la moitié de la longueur de l'intervalle.

Proposition 64. Si (Λ, W) est 2-divisible alors $\Lambda \cap [0, 1[= W$ (ce qui permet d'utiliser la notation $\text{IET}(\Lambda)$ dans la suite).

Démonstration. Soit $w \in W$ (en particulier $w \in [0, 1[$), comme 0 est aussi dans W alors $\frac{w-0}{2} \in \Lambda \cap [0, 1[$, puis comme Λ est un groupe pour $+$ on en déduit que $2\frac{w}{2} = w \in \Lambda \cap [0, 1[$. Réciproquement si $\lambda \in \Lambda \cap [0, 1[$ alors comme $\Lambda(W) \subset W$ on en déduit que $0 + \lambda = \{\lambda\} = \lambda \in W$, ce qui conclut. \square

Exemple 65. En notant $\Lambda = \{n + \sum_{k \geq 1} \frac{\epsilon_k}{2^k} \mid n \in \mathbb{Z}, (\epsilon_k)_k \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \text{ nulle presque partout}\}$, on obtient un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Puis par la définition de 2-divisible on en déduit immédiatement que $(\Lambda, \Lambda \cap [0, 1[)$ est 2-divisible.

4.1.2 Un cas injectif

On suppose à partir de maintenant que l'on travaille avec un Λ qui est 2-divisible.

Une famille génératrice.

On va montrer que le cas 2-divisible nous donne que le morphisme Φ est injectif, en le prouvant de manière similaire que pour le cas de IET.

Remarque. Quand on regarde un élément $f \in \text{IET}(\Lambda)$ on remarque que ses singularités sont les β_i correspondants et donc tous les β_i sont dans Λ . Ainsi tous les β_i^τ sont aussi dans Λ car ce sont les images par f des β_i . On obtient de cette remarque on obtient la proposition suivante :

Proposition 66. $R_{b,a}$ est dans dans $\text{IET}(\Lambda)$ si et seulement si a est dans $\Lambda \cap]0, 1[$ et $b \in \Lambda \cap [0, a[$.

Lemme 67. Si $\text{IET}(\Lambda)$ est 2-divisible alors $\text{IET}(\Lambda) = \langle R_{b,a} \mid R_{b,a} \in \text{IET}(\Lambda) \rangle$.

Remarque. Dans ce cas, on retrouve une famille génératrice de $\text{IET}(\Lambda)$ similaire à celle d'IET. On obtient alors que le morphisme d'abélianisation est unique mais surtout on va pouvoir continuer à définir des morphismes grâce à cette famille génératrice.

Démonstration. Soit $f \in \text{IET}(\Lambda)$ avec $f = (\alpha, \tau)$, α un n -uplet et $\tau \in \mathfrak{S}_n$. En reprenant la preuve du lemme 21, on récupère pour ce f la décomposition suivante : $f = R^n \circ R^{n-1} \circ \dots \circ R^0$, où on définit par récurrence les $R^i = R_{w_i, \delta_i}$ par $\delta_0 = \beta_n^\tau$, $w_0 = (\delta_0 - \epsilon) - (\beta_{\tau^{-1}(n)} - \epsilon)$ et $\delta_i = \beta_{\tau^{-1}(n-i)}^\tau$, $w_i = \delta_i - \epsilon - R^{i-1} \circ R^{i-2} \circ \dots \circ R^0(\beta_{\tau^{-1}(n-i)} - \epsilon)$. Le ϵ étant choisit petit par rapport au plus petit α_i . Et ainsi on a déjà que les δ_i sont dans $]0, 1[$ et les $w_i \in [0, \delta_i[$.

Pour montrer le lemme il suffit donc de montrer que tous les R^i sont dans $\text{IET}(\Lambda)$ et par la remarque, il suffit de montrer que tous les δ_i et les w_i sont dans Λ . Posons $P_i = \text{"}\delta_i, w_i \in \Lambda\text{"}$.

Pour l'initialisation, comme $\mathbb{Z} \in \Lambda$ et $\beta_i \in \Lambda$ alors $\delta_0 = \beta_n^\tau = 1 \in \Lambda$ et $w_0 = \delta_0 - \beta_{\tau^{-1}(n)} \in \Lambda$.

Soit $k \in [1, n]$ et supposons que les propriétés P_0, \dots, P_{k-1} sont vraies. Montrons P_k . On a déjà $\delta_k = \beta_{\tau^{-1}(n-k)}^\tau$ dans Λ car c'est un β_i^τ . Pour w_k , il suffit de dire que par hypothèse de récurrence, $R^{k-1} \circ \dots \circ R^0 \in \text{IET}(\Lambda)$ et ainsi il existe $\mu \in \Lambda$ tel que $w_k = \delta_k - \beta_{\tau^{-1}(n-k)} + \mu$ qui est bien un élément de Λ . Ainsi P_i est héréditaire et P_0 est vraie donc P_i est vraie.

On conclut que l'on a bien une décomposition de f en rotations $R_{b,a} \in \text{IET}(\Lambda)$. \square

Le morphisme Φ et construction d'un inverse.

Maintenant que l'on a une famille génératrice de cette forme on peut donner l'image du morphisme Φ . En effet on a $\text{Im}(\Phi) = \langle 2b \wedge a \mid a \in \Lambda \cap]0, 1[, b \in \Lambda \cap [0, a[\rangle = \Lambda \wedge_{\mathbb{Z}} \Lambda$, la disparition du 2 vient du fait que Λ est 2-divisible et donc il est équivalent d'avoir $R_{b,a} \in \text{IET}(\Lambda)$ ou $R_{\frac{b}{2}, a} \in \text{IET}(\Lambda)$. L'algèbre extérieure n'est pas sur \mathbb{Q} mais sur \mathbb{Z} car Λ n'est pas stable par multiplication par un élément de \mathbb{Q} mais l'est par un élément de \mathbb{Z} . On va maintenant construire un inverse à gauche afin d'avoir un isomorphisme.

Pour cela on va suivre les mêmes démarches que dans le cas IET. On notera encore une fois \tilde{f} la classe de f dans $\text{IET}(\Lambda)/D(\text{IET}(\Lambda))$.

Définition 68. Pour $a \in \Lambda \cap]0, 1[$ on pose :

$$\Psi_a : \begin{cases} \Lambda & \longrightarrow & \text{IET}(\Lambda)/D(\text{IET}(\Lambda)) \\ b & \longmapsto & \widetilde{R_{a\{\frac{b}{a}\}, a}} \end{cases}$$

De plus on pose $\Psi_0 = 0$.

Remarque. On voit rapidement que $a\{\frac{b}{a}\}$ est un élément de $\Lambda \cap]0, 1[$ car cet élément correspond à b modulo a et est donc juste égale à $b+na$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi l'application Ψ_a est bien définie. On déduit aussi que $\Psi_a(b+na) = \Psi_a(b)$.

Proposition 69. L'application Ψ_a est linéaire.

Démonstration. C'est la même preuve que la proposition 24. Il faut juste s'assurer que toutes les rotations considérées sont dans $\text{IET}(\Lambda)$, ce qui est le cas. \square

On arrive finalement à la proposition où la 2-divisibilité joue un rôle crucial.

Proposition 70. Pour tout $b \in \Lambda \cap]0, 1[$ tel que $2b \in \Lambda \cap]0, 1[$, on a $R_{b,2b} \in D(\text{IET}(\Lambda))$.

Démonstration. Ici aussi on reprend la démonstration de la proposition 25. En posant :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} R_{b,2b}(x) & x \in [\frac{b}{2}, b[\cup [b + \frac{b}{2}, 2b[\\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Ainsi que $g = R_{\frac{b}{2},1}$, on obtient $R_{b,2b} = f \circ g^{-1} \circ f \circ g$, on rappelle que f est d'ordre 2. Il suffit de montrer que $f, g \in \text{IET}(\Lambda)$. Comme $\Lambda \cap]0, 1[$ est 2-divisible et que $b \in \Lambda \cap]0, 1[$ alors $\frac{b}{2} \in \Lambda \cap]0, 1[$. De plus $1 \in \Lambda$ ainsi $g \in \text{IET}(\Lambda)$. Pour f il suffit de dire que f est soit égal à $R_{b,2b}$ soit à id. Il suffit donc de voir que ses singularités sont dans Λ , ce qui est le cas par 2-divisibilité car les nouvelles singularités sont $\frac{b}{2}$ et $\frac{3b}{2}$. On conclut que le commutateur trouvé est dans $D(\text{IET}(\Lambda))$. \square

On prouve alors la linéarité à droite "restreinte" :

Lemme 71. Pour tout $a, a' \in \Lambda \cap]0, 1[$ tels que $a + a' \in \Lambda \cap]0, 1[$ on a $\Psi_{a+a'} = \Psi_a + \Psi_{a'}$.

Démonstration. Là encore on récupère la décomposition trouvée dans la démonstration du cas IET global, lemme 27. Soit $a, a' \in \Lambda \cap]0, 1[$ tels que $a + a' \in \Lambda \cap]0, 1[$ et $b \in \Lambda$. Par la propriété $\Psi_a(b) = \Psi_a(b+ka)$ et par linéarité, on peut supposer que $b \in \Lambda \cap]0, \min\{a, a'\}[$. On a

$$R_{b,a+a'} = R_{b,a'} \circ R_{a'-b,1} \circ R_{b,a} \circ R_{a-b,1} \circ R_{b,2b} \circ R_{a-b,1}^{-1} \circ R_{a'-b,1}^{-1}$$

Il suffit de voir que chaque terme est dans $\text{IET}(\Lambda)$. Or tous les indices à droite ($\{a, a', 2b, 1\}$) sont dans $\Lambda \cap]0, 1[$ et tous les indices à gauche ($\{b, a' - b, a - b\}$) sont dans $\Lambda \cap]0, \min\{a, a'\}[$, ce qui conclut que chacun des termes est dans $\text{IET}(\Lambda)$. En prenant le tilde et avec la proposition 70 on obtient :

$$\Psi_{a+a'}(b) = \Psi_a(b) + \Psi_{a'}(b) + \widetilde{R_{b,2b}} = \Psi_a(b) + \Psi_{a'}(b)$$

Ce qui conclut le lemme. \square

Il reste encore un lemme à montrer qui va nous permettre pour tout $a \in \Lambda$ de choisir un élément $a' \in \Lambda \cap [0, 1]$ tel qu'ils auront même image par notre futur morphisme ψ .

Lemme 72. *Soit $a \in \Lambda$ et $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $|a| \leq 1$ et $\frac{p}{q}a \in \Lambda \cap [-1, 1]$. Alors pour tout $b \in \Lambda$ on a l'égalité $\Psi_{\frac{p}{q}a}(b) = \Psi_a(\frac{p}{q}b)$.*

Démonstration. On peut supposer p et q premiers entre eux et ainsi on obtient qu'il existe des coefficients de Bézout $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $up + vq = 1$.

Ainsi $u\frac{p}{q}a + va = \frac{(up + vq)a}{q} = \frac{a}{q} \in \Lambda \cap [-1, 1]$. Cela nous permet alors d'utiliser le lemme précédent et on obtient alors :

$$\Psi_{\frac{p}{q}a}(b) = p\Psi_{\frac{a}{q}}(b) = \Psi_{\frac{a}{q}}(pb) = q\Psi_{\frac{a}{q}}(\frac{p}{q}b) = \Psi_a(\frac{p}{q}b)$$

Ce qui conclut. \square

Il ne reste plus qu'à donner le morphisme ψ . Pour cela on note pour tout $a \in \Lambda$ l'élément N_a défini comme

$$N_a = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \frac{a}{2^k} \leq 1\}$$

C'est une application croissante.

Proposition 73. *L'application*

$$\psi : \begin{cases} \Lambda \times \Lambda & \longrightarrow IET(\Lambda)/D(IET(\Lambda)) \\ (b, a) & \longmapsto \Psi_{\frac{a}{2^{N_a}}}(b2^{N_a}) \end{cases}$$

est bilinéaire.

Démonstration. Cette application est bien définie car par 2-divisibilité on a pour tout $a \in \Lambda$ que $\frac{a}{2^{N_a}} \in \Lambda$ et c'est bien un élément de $[0, 1]$. Cette application est directement linéaire en " b ". Pour montrer la linéarité en " a " on peut faire des calculs similaires que dans la proposition 32. Soit $b, a, a' \in \Lambda$ et on traite d'abord le cas où a, a' sont positifs.

$$\psi(b, a + a') = \Psi_{\frac{a+a'}{2^{N_{a+a'}}}}(b2^{N_{a+a'}}) = \Psi_{\frac{a}{2^{N_{a+a'}}}}(b2^{N_{a+a'}}) + \Psi_{\frac{a'}{2^{N_{a+a'}}}}(b2^{N_{a+a'}})$$

Comme $\frac{a}{2^{N_{a+a'}}} = \frac{a}{2^{N_a}} \times \frac{2^{N_a}}{2^{N_{a+a'}}$ et que les éléments en jeu vérifient les conditions du lemme 72 on obtient :

$$\psi(b, a + a') = \Psi_{\frac{a}{2^{N_a}}}(b2^{N_a}) + \Psi_{\frac{a'}{2^{N_{a'}}}}(b2^{N_{a'}}) = \psi(b, a) + \psi(b, a')$$

Pour le cas où a, a' sont négatifs, il suffit de voir que $\psi(b, a) = \psi(-b, -a)$ et on retrouve la somme de deux termes positifs. Si maintenant on a deux signes opposés on peut toujours supposer $a + a' \geq 0$ quitte à mettre un moins dans le b . On suppose que c'est a qui est positif et donc a' négatif. On a alors $\psi(b, a) = \psi(b, a + a' - a') = \psi(b, a + a') - \psi(b, a')$, ce qui conclut. \square

On peut alors voir cette application bilinéaire comme une application définie sur le produit tensoriel $\Lambda \oplus \Lambda$, on notera toujours cette application ψ .

Proposition 74. *Pour tout $a \in \Lambda$ on a $\psi(a \otimes a) = 0$.*

Démonstration. $\psi(a \otimes a) = \Psi_{\frac{a}{2^{N_a}}}(a2^{N_a}) = 2^{2N_a} \Psi_{\frac{a}{2^{N_a}}}(\frac{a}{2^{N_a}}) = 0$ \square

On peut alors voir ψ comme une application définie sur l'algèbre extérieure $\Lambda \wedge_{\mathbb{Z}} \Lambda$. Il reste encore à voir que l'on a maintenant un inverse à notre fonction Φ de départ. On pose l'application

$$\left(\frac{1}{2}\psi\right) : \begin{cases} \Lambda \wedge \Lambda & \longrightarrow \text{IET}(\Lambda) / D(\text{IET}(\Lambda)) \\ b \wedge a & \longmapsto \psi\left(\left(\frac{1}{2}b\right) \wedge a\right) \end{cases}$$

Et on vérifie pour tout $a \in \Lambda \cap]0, 1]$ et $b \in \Lambda \cap [0, a[$:

$$\left(\frac{1}{2}\psi\right) \circ \Phi(\widetilde{R_{b,a}}) = \left(\frac{1}{2}\psi\right)(2b \wedge a) = \psi(b \wedge a) = \widetilde{R_{b,a}}$$

Ainsi l'application Φ est injective.

4.2 A la recherche d'un exemple tel que le noyau n'est pas trivial

De nouveau dans cette partie on fixe $(\Lambda, +)$ un sous-groupe de \mathbb{R} qui contient \mathbb{Z} et W un sous-ensemble de $[0, 1[$ qui contient 0, tels que $\Lambda(W) \subset W$. On note toujours Φ le morphisme d'abélianisation.

4.2.1 Des cas où l'image du morphisme d'abélianisation est nulle

Le cas d'un sous-groupe d'IET fini

Dans cette partie on va régler le cas des sous-groupes $\text{IET}(\Lambda, W)$ qui sont finis grâce au lemme suivant :

Lemme 75. *Tous les éléments périodiques de IET sont dans $D(\text{IET})$.*

Démonstration. Soit $f \in \text{IET}$, on rappelle qu'un ensemble de type M est une union finie d'intervalles semi-ouverts dont les points finaux appartiennent à l'ensemble dénombrable D^∞ des orbites des singularités de f . La preuve se fait par étapes.

Soit $f \in \text{IET}$ qui soit une permutation de deux intervalles disjoints de $[0, 1[$. On les note $I_1 = [a, b[$ et $I_2 = [c, d[$. La même preuve que celle de la proposition 25 va fonctionner. On note u le milieu de I_1 et v le milieu de I_2 et $x = \frac{b-a}{2} = \frac{d-c}{2}$. On pose g la transformation d'échange d'intervalle qui permute $[a, u[$ avec $[c, v[$, on a alors $g = g^{-1}$. On a alors $f = g \circ R_{x,1} \circ g^{-1} \circ R_{x,1}^{-1}$.

Soit $f \in \text{IET}$ et $q \in \mathbb{N}$ telle que f est une permutation cyclique de q intervalles disjoints I_1, \dots, I_q inclus dans $[0, 1[$. On peut alors voir f comme un élément de \mathfrak{S}_q et comme une famille génératrice de \mathfrak{S}_q sont les permutations, on peut décomposer f en produit de permutations, ce qui conclut par le cas précédent.

Soit $f \in \text{IET}$ et $q \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $x \in [0, 1[$, soit $f(x) = x$ soit l'ordre de x sous f est q . On dira que f est périodique de période unique q . On a alors par le théorème 8 qu'il existe M_0 et M_1 deux ensembles de type M tels que $f|_{M_0} = \text{id}$ et

pour tout $x \in M_1$, l'ordre de x est q . Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $M_1 = \bigsqcup_{i=1}^k I_i$ où I_i sont des intervalles semi-ouverts dont les points finaux appartiennent à l'ensemble dénombrable D^∞ . Par définition de M_1 et de f on obtient que les ensembles I_k vont par groupe de q intervalles (tous disjoints) sur lesquels f agit par permutation cyclique et il y en a un nombre fini $l \in \mathbb{N}$ car M_1 est de type M . On note J_j une telle réunion de q intervalles pour $j \in \llbracket 1, l \rrbracket$ on obtient alors $M_1 = \bigsqcup_{j=1}^l J_j$. On obtient alors que l'on peut décomposer f en l transformations d'échanges d'intervalles f_j qui sont les restrictions

de f à un J_j et qui sont des permutations cycliques de q intervalles, ce qui conclut par le cas précédent.

Soit $f \in \text{IET}$ qui est périodique d'ordre n . Par le théorème 8 on peut décomposer $[0, 1[$ en un nombre fini d'ensemble de type M . On note $M_1, \dots, M_{d(n)}$ ces ensembles, où $d(n)$ correspond au nombre de diviseur de n (car l'ordre d'un point doit diviser l'ordre de f . On rappelle aussi qu'un ensemble de type M peut être vide et donc $d(n)$ est une borne supérieur du nombre d'ensemble de type M que l'on peut avoir). On a alors que f se décompose en $d(n)$ transformations d'échanges d'intervalles f_i périodiques de période unique dont le support est M_i , ce qui conclut par le cas précédent. \square

Corollaire 76. *Si $\text{IET}(\Lambda, W)$ est fini alors le morphisme d'abélianisation a pour image $\{0\}$.*

On obtient alors que le noyau du morphisme d'abélianisation est l'abélianisé du groupe $\text{IET}(\Lambda, W)$. Concernant le noyau on va essayer de trouver un résultat similaire à celui de Matui, c'est-à-dire que l'on va vouloir montrer que le noyau est un 2-groupe. Dans le but de le montrer dans le cas fini on montre d'abord le lemme suivant

Lemme 77. *Si $\Lambda \neq \mathbb{Z}$ (ce qui revient à avoir $\text{IET}(\Lambda, W) \neq \{\text{id}\}$), on a l'équivalence entre :*

1. *Le groupe $\text{IET}(\Lambda, W)$ est fini.*
2. *L'ensemble des singularités W est fini.*

Démonstration.

1. \Rightarrow 2.

On procède par l'absurde en supposant que W est infini et on construit une suite d'IET qui sont distinctes deux à deux. Comme $\Lambda \neq \mathbb{Z}$ il existe $u \in \Lambda$ tel que $\{u\} \neq 0$ (la partie fractionnaire). Ainsi $\{u\} \in \Lambda \cap]0, 1[$ et comme on est dans un groupe $1 - \{u\} \in \Lambda \cap]0, 1[$, de plus l'un est dans $[0, \frac{1}{2}[$ et l'autre dans $[\frac{1}{2}, 1[$. Comme W est infini alors on a forcément que $W \cap [0, \frac{1}{2}[$ est infini ou (non exclusif) $W \cap [\frac{1}{2}, 1[$ est infini. On peut supposer sans perdre de généralité que le premier cas est réalisé. On note $v := \{u\} \in]0, \frac{1}{2}[$ et $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'éléments de $W \cap [0, \frac{1}{2}[$. On pose alors f_i l'application qui échange l'intervalle $[w_i, w_{i+1}[$ avec l'intervalle $[w_i+v, w_{i+1}+v[$. On a immédiatement que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f_i \in \text{IET}(\Lambda, W)$ et que pour tout $j \in \mathbb{N}$ tel que $i \neq j$ on a $f_i \neq f_j$. Ainsi $\text{IET}(\Lambda, W)$ est infini ce qui est absurde.

2. \Rightarrow 1.

Si on suppose W fini, on note n le cardinal de W et w_0, \dots, w_{n-1} les éléments qui composent W rangés dans l'ordre croissant (en particulier $w_0 = 0$) et on pose $w_n = 1$. On a alors n intervalles définis par $X_i = [w_{i-1}, w_i[$. Maintenant si $f \in \text{IET}(\Lambda, W)$ alors f envoie forcément un X_i sur un X_j car sinon il y a une nouvelle singularité. Ainsi on a n choix pour X_1 puis $n-1$ choix pour X_2 etc... Donc le cardinal de $\text{IET}(\Lambda, W)$ est inférieur ou égal à $n!$. \square

Théorème 78. *Si $\text{IET}(\Lambda, W)$ est fini alors son abélianisé est un 2-groupe élémentaire.*

Démonstration. Pour montrer ce théorème il suffit de montrer que $\text{IET}(\Lambda, W)$ est isomorphe à une somme directe de groupes de permutations car l'abélianisé d'un tel groupe est un 2-groupe. Pour ce faire par le lemme précédent on a que W est fini disons de cardinal n et en reprenant la deuxième implication du lemme précédent on écrit $[0, 1[$ comme l'union disjointe des $X_i = [w_{i-1}, w_i[$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ où les w_i sont les n éléments de W avec $w_0 = 0$ et $w_n = 1$. Ainsi si $f \in \text{IET}(\Lambda, W)$ alors f envoie forcément un X_i sur un X_j de même taille. On range alors les X_i par taille, comme on en a un nombre fini alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'ensemble $I_k = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \ell(X_i) = k\}$

est vide ou fini, on note n_k le cardinal de I_k . On a $[0, 1[= \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{i \in I_k} X_i$ et f peut se décomposer avec ses restrictions f_k sur $\bigsqcup_{i \in I_k} X_i$. Ainsi f peut se voir dans le groupe $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{S}_{n_k}$ (la somme directe est finie). Cela définit alors une application de $\text{IET}(\Lambda, W)$ dans $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{S}_{n_k}$ qui est directement un morphisme. En effet pour tout $f, g \in \text{IET}(\Lambda, W)$, $fg = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k g_k$ car les supports de deux applications ayant des indices distincts sont distincts, et donc on compose bien les permutations associées à f et à g . Ce morphisme est directement bijectif car seule l'identité est envoyé sur le neutre et on construit très facilement une IET $f \in \text{IET}(\Lambda, W)$ à partir d'un élément de $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{S}_{n_k}$, ce qui conclut. \square

Le cas où tout est rationnel

On suppose ici que $\Lambda \subset \mathbb{Q}$ et que $W \subset \mathbb{Q}$.

Proposition 79. *Le morphisme d'abélianisation Φ est trivial.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $f \in \text{IET}(\Lambda, W)$ on a $f \in D(\text{IET})$. Soit $f \in \text{IET}(\Lambda, W)$ et $f = R_{b_1, a_1} \circ \dots \circ R_{b_k, a_k}$ une décomposition en rotation dans IET. D'après la preuve du lemme 21 on trouve que tous les b_i et a_i sont dans \mathbb{Q} . Ainsi pour montrer que c'est un élément du groupe dérivé il suffit de montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ on a $b_i \wedge a_i = 0$ dans $\mathbb{R} \wedge_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, ce qui est le cas car les b_i et les a_i sont dans \mathbb{Q} . \square

Proposition 80. *Si $\Lambda, W \subset \mathbb{Q}$ alors l'abélianisé du groupe $\text{IET}(\Lambda)$ est un 2-groupe élémentaire.*

Démonstration. Pour montrer cette proposition on va démontrer que $\text{IET}(\Lambda, W)$ est la limite inductive de groupes G_n où la suite des groupes G_n est croissante pour l'inclusion et où l'abélianisé de chaque G_n est un 2-groupe élémentaire. Cela suffit pour démontrer que $\text{IET}(\Lambda)$ est un 2-groupe.

Pour faire cela on remarque que Λ et W sont dénombrables car incluent dans \mathbb{Q} on note alors $\Lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ avec pour tout i , $p_i \in \mathbb{Z}$ et $q_i \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $W = (w_i)_{i \in \mathbb{N}}$. On pose alors $\Lambda_n = \mathbb{Z}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ et $V_n = \{w_1, \dots, w_n\}$ ainsi que $W_n = \Lambda_n(V_n)$. On remarque que W_n est stable par Λ_n et est un ensemble fini. Donc on peut considérer $G_n = \text{IET}(\Lambda_n, W_n)$. Par définition on a immédiatement que $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$ et $W_n \subset W_{n+1}$, on en déduit alors que $G_n \subset G_{n+1}$. De plus par le théorème 78, les abélianisés des G_n sont des 2-groupes élémentaires car les W_n sont finis. On pose alors G la limite inductive des G_n , on a $G = \bigcup G_n$ et l'abélianisé de G est un 2-groupe élémentaire.

On montre maintenant que $G = \text{IET}(\Lambda, W)$. Soit $f \in G$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f \in G_n \subset \text{IET}(\Lambda, W)$, donc $G \subset \text{IET}(\Lambda, W)$. Réciproquement, si $f \in \text{IET}(\Lambda, W)$ alors il existe $k \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \dots, \beta_k \in \Lambda$ qui sont les singularités de f et il existe $T_1, \dots, T_k \in \Lambda$ les translations de f . Ainsi il existe un rang N_0 tel que pour tous $n \geq N_0$, tous les β_i sont dans W_n et les T_i sont dans Λ_n . Ainsi $f \in G_n$ pour $n \geq N_0$ donc tout élément de $\text{IET}(\Lambda)$ est dans un certain G_n d'où $\text{IET}(\Lambda, W) \subset G$. Ce qui conclut. \square

5 Annexes

5.1 Implémentation des IET

J'ai utilisé le logiciel SAGE pour implémenter toutes mes fonctions.

Dans la création des IET il nous faut savoir où est notre élément x de base et où il va aller d'où la fonction :

```
def trouver_emplacement (x,B):
    #x>=0
    #La sortie sera le numéro de l'intervalle
    #(entre quels  $\beta^{\tau}_i=B[i]$ ) se situe x
    n=len(B)
    i=0
    while i<n and x>=B[i]:
        i=i+1
    if i<n:
        return i-1
        #ici on met le -1 car  $x<B[i]$  c'est à dire
        #qu'il est dans le i-1 ème intervalle
    else:
        return -1
        #valeur arbitraire pour distinguer les cas plus tard
```

Voici finalement l'algorithme pour créer une IET :

```
def IET (a,T):
    #T est une permutation de {1,...,n}
    #il faut donc faire attention aux indices
    n=len(a)
    P=Permutation(T)
    Q=P.inverse() #pour définir les  $\beta^{\tau}_i$ 
    b=[0] #correspond aux  $\beta_i$ 
    B=[0] #correspond aux  $\beta^{\tau}_i$ 
    for i in range (0,n):
        b.append(b[i]+a[i])
    A=[]
    for i in range (0,n):
        A.append(a[Q[i]-1]) #on rajoute le -1 car le kème
        #intervalle est dans la case k-1. D'où le -1
    for i in range (0,n):
        B.append(B[i]+A[i])
    def f (x):
        i=trouver_emplacement(x,b)
        if i==-1:
            return x
        else:
            v=x-b[i]+B[T[i]-1]
            return v
    return f
```

Afin de créer rapidement des rotations de la forme $R_{b,a}$ j'ai construit la fonction suivant :

```
def rotation (b,a):
    #[0,a] est le domaine où la rotation +b s'effectuera. Il sera
    #supposé que l'on prendra toujours a dans [0,1], b<a.
    if a==1:
        f= IET([a-b,b],[2,1])
        return f
    else:
        f=IET([a-b,b,1-a],[2,1,3])
        return f
```

Lors de nombreux tests pour essayer de voir ce que donne certains commutateurs j'ai eu besoin de créer une fonction qui compose des IET et aussi une qui inverse une IET (quand on peut lui donner le (α, τ) correspondant) :

```
def composition(L):
    #L est ici une liste d'IET
    n=len(L)
    def g (x):
        v=x
        for k in range (0,n):
            v=L[n-1-k](v)
        return v
    return g
```

```
def inverseIET (a,T):
    n=len(a)
    P=Permutation(T)
    Q=P.inverse()
    Q=list(Q)
    A=[]
    B=[0]
    for i in range (0,n):
        A.append(a[Q[i]-1])
    for i in range (0,n):
        B.append(B[i]+A[i])
    b=[]
    for i in range (0,n):
        b.append(B[i+1]-B[i])
    g=IET(b,Q)
    return g
```

```
def inverseRot (b,a):
    f=rotation(a-b,a)
    return f
```


Références

- [1] B. Weiss E. Glasner. Weak orbit equivalence of cantor minimal systems. *Internat. J. Math*, 1995.
- [2] H.Matui. Some remarks on topological full groups of cantor minimal systems. *Internat. J. Math*, 2006.
- [3] M.Keane. Interval exchange transformations. *Math. Z.*, 1975.
- [4] M.Sage. Algèbre multilinéaire, [http ://www.normalesup.org/ sage/Enseignement/Cours/ProdTens.pdf](http://www.normalesup.org/sage/Enseignement/Cours/ProdTens.pdf).
- [5] P.Arnoux. Echanges d'intervalles et flots sur les surfaces. *Semin. Les Plans-sur-Bex 1980,* 1981.
- [6] De Cornulier Yves. *Groupes pleins-topologiques, d'après Matui, Juschenko, Monod,...* (version écrite de l'exposé du séminaire Bourbaki du 19 Janvier 2013 disponible à [http ://www.normalesup.org/ cornulier/plein.pdf](http://www.normalesup.org/cornulier/plein.pdf)).